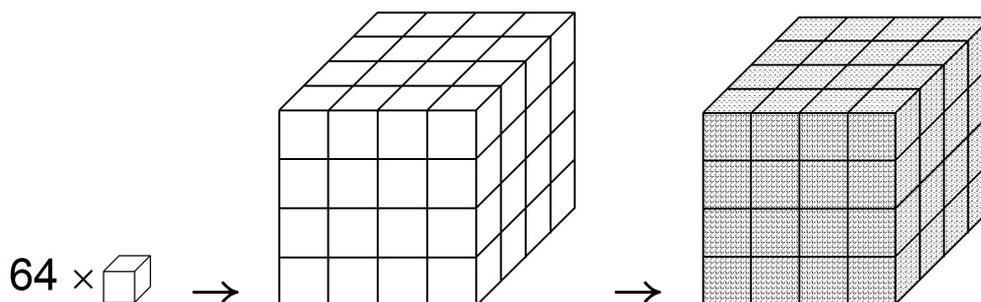


## Aufgaben für die Klassenstufen 11/12

|                   |   |
|-------------------|---|
| Einzelwettbewerb  | Aufgaben OE1, OE2, OE3                          |
| Gruppenwettbewerb | Aufgaben OG1, OG2, OG3, OG4                     |
| Speedwettbewerb   | Aufgaben OS1, OS2, OS3, OS4, OS5, OS6, OS7, OS8 |

**Aufgabe OE1:**

- (a) 64 kleine lose Holzwürfel werden zu einem  $4 \times 4 \times 4$  Würfel zusammengebaut. Dann wird die komplette Außenfläche des großen Würfels mit grauer Farbe angestrichen (von allen Seiten, also auch von unten).



Nun wird der große Würfel wieder auseinandergebaut.

Wieviele kleine Würfel sind nun auf wievielen Seiten grau ?

Füllen Sie die Tabelle aus und erklären Sie Ihre Überlegungen.

| Anzahl der grauen Seiten eines kleinen Würfels | 0 | 1 | 2 | 3 |
|--|---|---|---|---|
| Anzahl Würfel                                  |   |   |   |   |

- (b) Verallgemeinern Sie die Überlegungen aus (a) für einen Würfel der aus  $n^3$  kleinen losen Holzwürfeln zu einem  $n \times n \times n$  Würfel zusammengebaut wird. Dabei sei  $n \in \mathbb{N}$  eine beliebige natürliche Zahl mit  $n \geq 4$ .

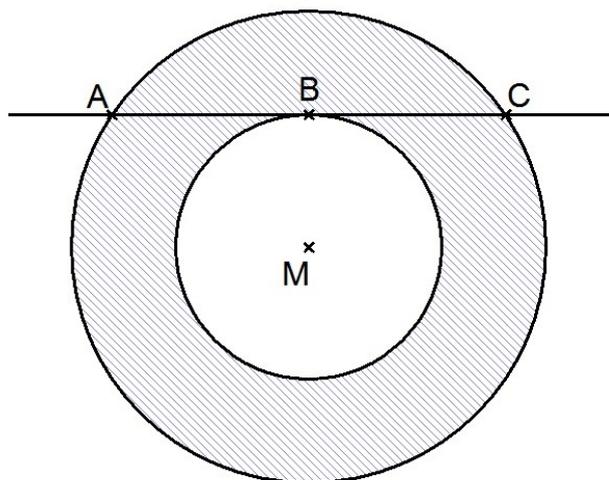
Füllen Sie die Tabelle aus und erklären Sie Ihre Überlegungen.

| Anzahl der grauen Seiten eines kleinen Würfels | 0 | 1 | 2 | 3 |
|--|---|---|---|---|
| Anzahl Würfel                                  |   |   |   |   |

**Anmerkung:** In die Tabelle sind nun Terme einzutragen, die von  $n$  abhängen dürfen.

**Aufgabe OE2:**

Zwei Kreise mit demselben Mittelpunkt  $M$  (aber unterschiedlichen Radien) bilden einen Kreisring. Eine Gerade, die den kleineren Kreis im Punkt  $B$  berührt, schneidet den größeren Kreis in den Punkten  $A$  und  $C$ .



Der Abstand zwischen  $A$  und  $C$  beträgt  $|\overline{AC}| = 20\text{cm}$ .

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Kreisrings.

Hinweis:  $\pi \approx 3.1416$

**Aufgabe OE3:**

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes  $P = (6, 3)$  zum Graphen der Funktion:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

**Hilfsmittel für den Gruppenwettbewerb, Klassenstufen 11/12**

Je nach Lösungsweg können Sie möglicherweise die folgenden Werte der trigonometrischen Funktionen  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  nutzen. (Es gibt auch Lösungsmöglichkeiten für alle Aufgaben ohne Verwendung dieser Werte.)

| Winkel $\alpha$<br>(im Gradmaß) | $0^\circ$ | $30^\circ$                   | $45^\circ$           | $60^\circ$                   | $90^\circ$      |
|---------------------------------|-----------|------------------------------|----------------------|------------------------------|-----------------|
| $\sin(\alpha)$                  | 0         | $\frac{1}{2}$                | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ | 1               |
| $\cos(\alpha)$                  | 1         | $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$                | 0               |
| $\tan(\alpha)$                  | 0         | $\frac{1}{\sqrt{3}}$         | 1                    | $\sqrt{3}$                   | nicht definiert |

**Aufgabe OG1:**

Für wieviele natürliche Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  mit  $1 \leq n \leq 100$  ist die Zahl  $n^n$  eine Quadratzahl?

Begründen Sie Ihre Antwort.

## Aufgabe OG2:

Im Kaufhaus fährt eine Rolltreppe nach oben.

Am Montag stellt sich Knut auf die Rolltreppe. Er braucht 30 Sekunden nach oben.

Am Dienstag hat Knut es eilig und geht auf der fahrenden Rolltreppe nach oben.

Diesmal braucht er nur 12 Sekunden nach oben.

- (a) Am Mittwoch ist die Rolltreppe kaputt und steht still. Wie lange braucht Knut, um auf der stehenden Rolltreppe nach oben zu gehen ?
- (b) Am Donnerstag fährt die Rolltreppe abwärts. (Beim Reparieren ist den Technikern ein kleiner Fehler unterlaufen.) Wie lange braucht Knut, um auf der nach unten fahrenden Rolltreppe nach oben zu gehen ?

(Gehen Sie davon aus, dass die Geh-Geschwindigkeit von Knut stets konstant bleibt und auch dass die Rolltreppe immer mit derselben Geschwindigkeit fährt.)

---

## Aufgabe OG3:

Gegeben seien zwei Kreise mit den Mittelpunkten  $M_1 = (0, 0)$  und  $M_2 = (8, 0)$ . Beide haben den Radius 2.

Wir nennen eine Gerade eine **Doppelberührgerade**, falls sie beide Kreise in jeweils genau einem Punkt berührt.

- (a) Wieviele Doppelberührgerade gibt es ?

Erstellen Sie eine Skizze mit den beiden Kreisen und zeichnen Sie darin alle Doppelberührgeraden ein.

- (b) Bestimmen Sie zu jeder Doppelberührgeraden:

- die Gleichung der Geraden
- die Koordinaten der Berührungspunkte der Geraden mit den beiden Kreisen

---

## Aufgabe OG4:

Ein rechteckiges Blatt Papier  $ABCD$  hat die Maße  $12\text{cm} \times 16\text{cm}$ .

Die Ecke  $A$  bleibt fest auf dem Tisch liegen. Wenn man die diagonal gegenüberliegende Ecke  $C$  auf  $A$  faltet, so entsteht in dem Blatt ein gerader Knick.

Wie lang ist dieser Knick?

## Aufgabe OS1:

Die Seiten eines Buches werden fortlaufend durchnummeriert (beginnend mit Seite 1). Die Seitenzahlen haben zusammen 999 Ziffern.

Wieviele Seiten hat das Buch?

---

## Aufgabe OS2:

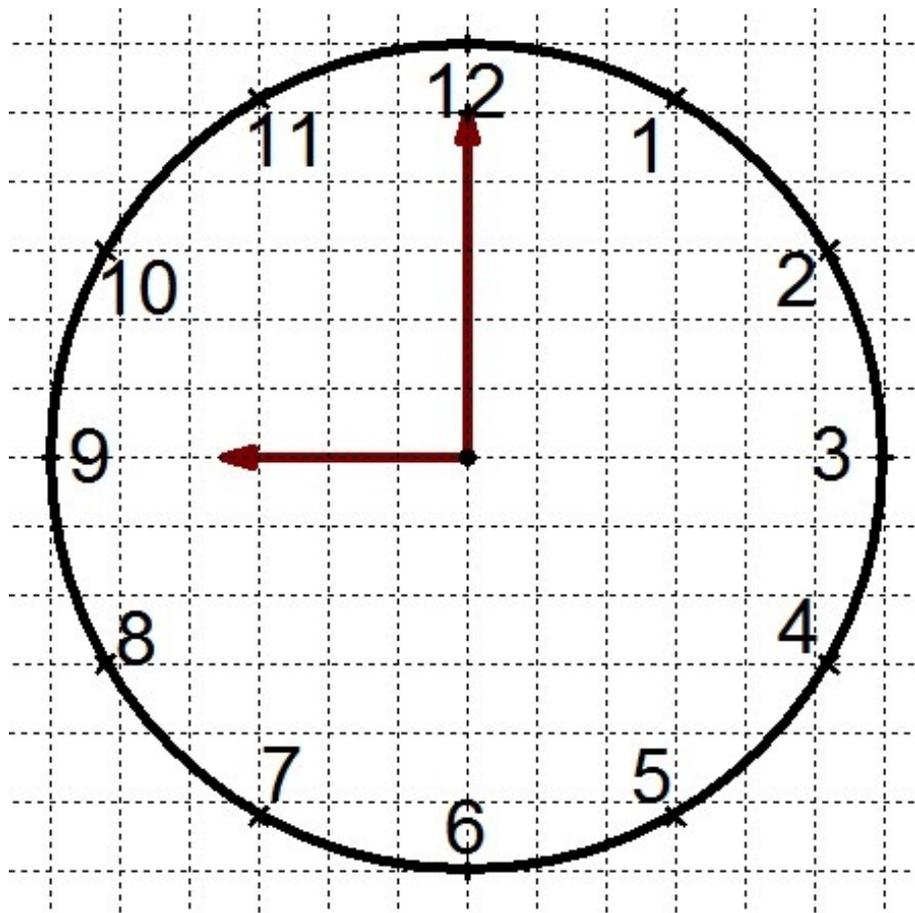
Eine Schnecke sitzt im Mittelpunkt einer Kirchturmuhhr auf dem Minutenzeiger.

Um Punkt 9:00 Uhr beginnt sie mit konstanter Geschwindigkeit auf dem Zeiger nach außen zu kriechen.

Um 10:30 macht sie eine Pause von 60 Minuten, dann kriecht sie weiter.

Sie erreicht die Spitze des Zeigers um 12:30 Uhr.

Skizzieren Sie den Weg der Schnecke auf dem Ziffernblatt.



**Anmerkung:** Die Skizze muss nicht exakt sein.

---

**Aufgabe OS3:**

Knut hat Gewichte zu 2kg, 5kg und 10kg.

Er wählt 10 Gewichte aus. Diese wiegen zusammen genau 40kg.

Wieviele Gewichte jeder Sorte hat Knut ausgewählt?

\_\_\_\_\_

**Aufgabe OS4:**

4 nicht unterscheidbare Schnüre werden so unter ein Tuch gelegt, dass die beiden Enden einer jeden Schnur auf gegenüberliegenden Seiten des Tuches hervorstehen. (Unter dem Tuch liegen die Schnüre kreuz und quer durcheinander.)

Nun werden auf jeder Seite des Tuches aus den 4 hervorstehenden Enden zufällig 2 Paare gebildet und diese jeweils miteinander verknotet.

Dann wird das Tuch weggezogen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 4 Schnüre nun einen einzigen geschlossenen Ring bilden ?

\_\_\_\_\_

**Aufgabe OS5:**

In den Zahlen  $a$  und  $b$  kommt die Ziffer 0 nicht vor.  $a$  ist kleiner als  $b$ . Das Produkt von  $a$  und  $b$  beträgt 10000.

Bestimmen Sie  $a$  und  $b$ .

\_\_\_\_\_

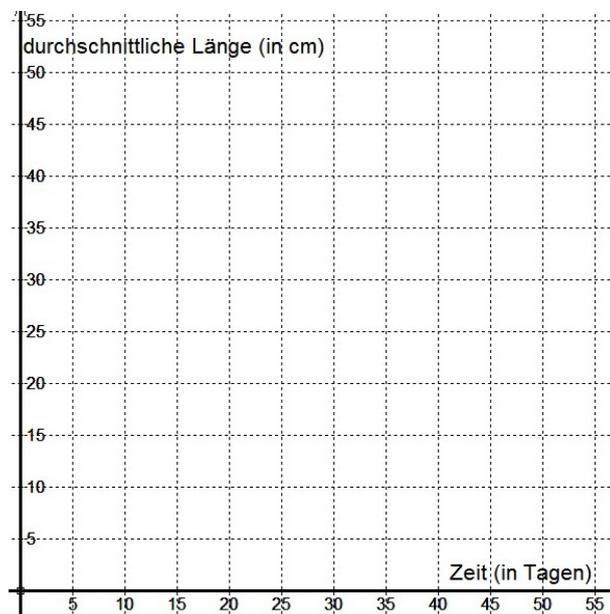
**Aufgabe OS6:**

In einem Garten werden Blumen gepflanzt. Jede der Blumen wächst pro Tag um  $1\text{ cm}$ .

Zum Zeitpunkt 0 wird die erste Blume gepflanzt. 10 Tage später wird die zweite Blume gepflanzt, weitere 10 Tage später die nächste und so weiter.

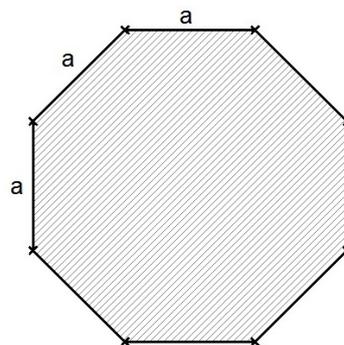
Die Funktion  $f$  gibt die durchschnittliche Länge aller vorhandenen Blumen in Abhängigkeit von der Zeit an.

Tragen Sie in das folgende Schaubild den Graphen der Funktion  $f$  über dem Intervall  $[0, 55]$  ein.



**Aufgabe OS7:**

Wie groß ist der Flächeninhalt eines regelmäßigen 8-Ecks in Abhängigkeit seiner Seitenlänge  $a$  ?



**Aufgabe OS8:**

Gegeben seien zwei sechseckige Würfel, die mit Zahlen beschriftet werden dürfen.

Ziel ist es, dass beim Werfen dieser beiden Würfel, alle Augensummen zwischen 1 und 36 auftreten können.

Wie muss man die Würfel dazu beschriften?

**Hinweis:** Die beiden Würfel dürfen unterschiedlich beschriftet werden. Es dürfen alle natürlichen Zahlen und auch die Zahl 0 für die Beschriftung verwendet werden.

---