Institut für MATHEMATIK

Aufgaben für die Klassenstufen 11/12

mit Lösungen

Einzelwettbewerb	Aufgaben OE1, OE2, OE3
Gruppenwettbewerb	Aufgaben OG1, OG2, OG3, OG4
Speedwettbewerb	Aufgaben OS1, OS2, OS3, OS4, OS5, OS6, OS7, OS8

Aufgabe OE1:

Ein Dreieck $\triangle ABC$ mit einem rechten Winkel bei C hat die Kathetenlängen:

$$a = \left|\overline{BC}\right| = 15\text{cm} \quad \text{und} \quad b = \left|\overline{AC}\right| = 8\text{cm}$$

Nun wird der Punkt M auf der Kathete $\overline{BC}$ gewählt, für den gilt:

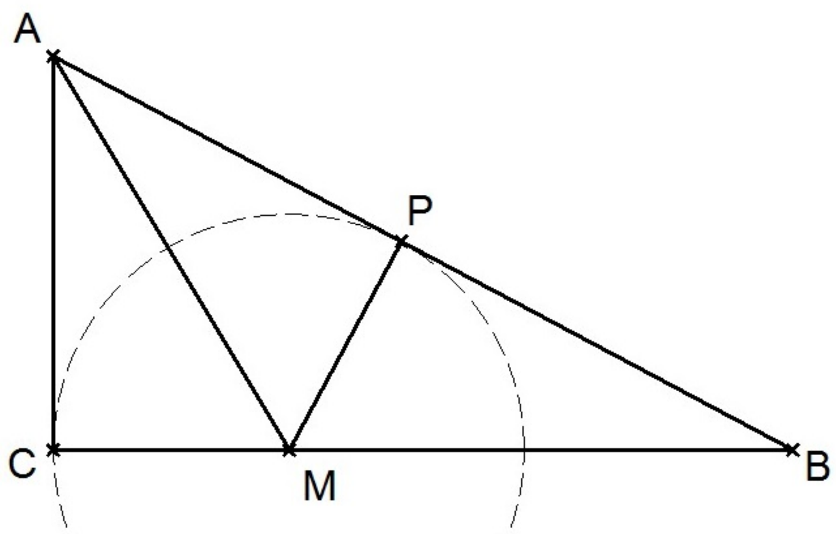
Der Kreis mit Mittelpunkt M, der durch den Punkt C verläuft, berührt die Hypothenuse $\overline{AB}$.

Bestimmen Sie den Radius dieses Kreises.

Es sollte nachvollziehbar sein, wie Sie zu dem Ergebnis gekommen sind.

Lösungsvorschlagsvorschlag OE1:

Sei P der Berührpunkt des Kreises mit der Hypothenuse. Wir fertigen zunächst eine Skizze an:



Zusätzlich wurden hier die Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{PM}$ eingetragen.

Gegeben sind die Streckenlängen:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \left|\overline{BC}\right| & = & a & = & 15\text{cm} \\ \left|\overline{AC}\right| & = & b & = & 8\text{cm} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Pythagoras}} c = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(15\text{cm})^2 + (8\text{cm})^2} = \sqrt{289\text{cm}^2} = 17\text{cm}$$

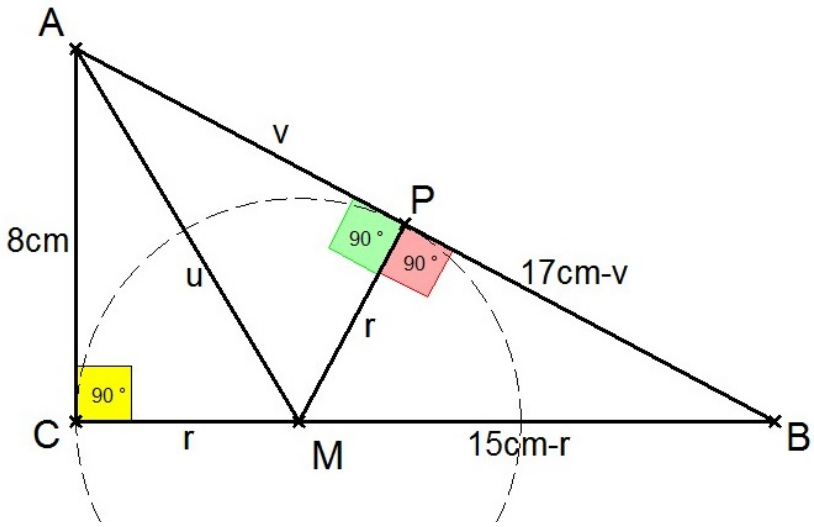
Außerdem gilt: $\left|\overline{MP}\right| = \underbrace{\left|\overline{MC}\right| = r}_{\Rightarrow \left|\overline{MB}\right| = a - r = 15\text{cm} - r}$ (wobei r der gesuchte Kreisradius ist)

Weiterhin wissen wir, dass:

$$\measuredangle MCA = \measuredangle MPB = \measuredangle APM = 90°$$

Schließlich schreiben wir abkürzend:

$$|\overline{AM}| \overset{\text{def.}}{=} u \quad \text{und} \quad \underbrace{|\overline{AP}| \overset{\text{def.}}{=} v}_{\Rightarrow |\overline{PB}| = c - v = 17\text{cm} - v}$$



Nun wenden wir dreimal den Satz des Pythagoras an:

Pythagoras im $\triangle MCA$	$\Rightarrow$	u^2	$=$	r^2	$+$	$(8\text{cm})^2$	(1)
Pythagoras im $\triangle APM$	$\Rightarrow$	u^2	$=$	r^2	$+$	v^2	(2)
Pythagoras im $\triangle MPB$	$\Rightarrow$	$(15\text{cm} - r)^2$	$=$	r^2	$+$	$(17\text{cm} - v)^2$	(3)

Aus (1) und (2) erhält man:

$$(8\text{cm})^2 \overset{(1)}{=} u^2 - r^2 \overset{(2)}{=} v^2 \quad \overset{v \geq 0}{\Rightarrow} \quad v = 8\text{cm}$$

Setzt man dies in (3) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} (15\text{cm} - r)^2 = r^2 + (17\text{cm} - 8\text{cm})^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 225\text{cm}^2 - 30\text{cm} \cdot r + r^2 = r^2 + 81\text{cm}^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 144\text{cm}^2 = 30\text{cm} \cdot r \\ &\Leftrightarrow \quad r = \frac{144\text{cm}^2}{30\text{cm}} = \frac{24}{5}\text{cm} = 4{,}8\text{cm} \end{aligned}$$

Aufgabe OE2:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

Von den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ wird eine gestrichen. Der Durchschnitt der übrigen Zahlen beträgt $8,2$.

Was ist n und welche Zahl wurde gestrichen?

> Begründen Sie auch, dass es nur eine Möglichkeit gibt.

Lösungsvorschlag OE2:
Sei S die Summe der $n-1$ Zahlen, aus denen der Durchschnitt gebildet wird. Es gilt:

$$\frac{S}{n-1} = 8,2 \quad \Leftrightarrow \quad S = \frac{41}{5} \cdot (n-1)$$

Da S eine natürliche Zahl ist, muss $n-1$ durch 5 teilbar sein. Wir versuchen verschiedene Möglichkeiten:

$\boxed{n-1 = 0 \;\Leftrightarrow\; n = 1}$ Das macht keinen Sinn, denn dann würde ja die einzige Zahl 1 gestrichen werden, und man kann keinen Durchschnitt mehr bilden.

$\boxed{n-1 = 5 \;\Leftrightarrow\; n = 6}$ Dann wäre $S = \frac{41}{5} \cdot 5 = 41$. Da aber $1+2+\ldots+6 = 21$ kann nach sich dem Streichen einer der Zahlen nicht die Summe 41 ergeben.

$\boxed{n-1 = 10 \;\Leftrightarrow\; n = 11}$ Dann wäre $S = \frac{41}{5} \cdot 10 = 82$. Da aber $1+2+\ldots+10 = 55$ kann sich nach dem Streichen einer der Zahlen nicht die Summe 82 ergeben.

$\boxed{n-1 = 15 \;\Leftrightarrow\; n = 16}$ Dann muss $S = \frac{41}{5} \cdot 15 = 123$ sein. Außerdem ist $1+2+\ldots+16 = 136$. Also ist dies eine mögliche Lösung, wobei die Zahl $136-123 = 13$ gestrichen werden muss.

$\boxed{n-1 = 20 \;\Leftrightarrow\; n = 21}$ Dann wäre $S = \frac{41}{5} \cdot 20 = 164$. Da aber $1+2+\ldots+21 = 231$ kann sich nach dem Streichen einer der Zahlen (zwischen 1 und 21) nicht die Summe 164 ergeben.

$\boxed{\text{und so weiter}}$ Man kann in der Tat beweisen, dass es keine weitere Lösungsmöglichkeit gibt, denn im Fall $n > 21$ wäre:

$$S \geq \underbrace{1+2\ldots+(n-1)}_{\text{größte Zahl wird gestrichen}} \overset{\text{(Gaußsche Summenformel)}}{=} \frac{n}{2} \cdot (n-1) \overset{(n \geq 21)}{>} \frac{21}{2} \cdot (n-1) \overset{(21/2 > 41/5)}{>} \frac{41}{5} \cdot (n-1) = S$$

Das kann aber nicht sein, denn dann wäre $S > S$.

Ergebnis: Es ist also $n = 16$. Gestrichen wird die Zahl 13.

Aufgabe OE3:

(a) Wir betrachten die beiden (parallelen) Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen:

$$g_1 : y = 2x \qquad \text{und} \qquad g_2 : y = 2x + 5$$

Wie groß ist der Abstand von g_1 und g_2?

(b) Seien nun $n, m \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten die beiden (parallelen) Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen:

$$g_1 : y = mx \qquad \text{und} \qquad g_2 : y = mx + n$$

Wie groß ist der Abstand von g_1 und g_2 in Abhängigkeit von n und m?

Es sollte nachvollziehbar sein, wie Sie zu den Ergebnissen gekommen sind.

Lösungsvorschlag OE3:

(a) Wir betrachten einen beliebigen Punkt auf g_2, also etwa $P_2(x_2/y_2) = P_2(0/5)$.

Die Gerade h, die senkrecht auf g_1 (und damit auch senkrecht auf g_2) steht und durch P_2 verläuft, hat die Steigung $-\frac{1}{2}$ und somit die Gleichung (Punkt-Steigungs-Form):

$$h : y = -\frac{1}{2} \cdot (x - 0) + 5 = -\frac{1}{2} \cdot x + 5$$

Wir berechnen nun den Schnittpunkt $P_1(x_1/y_1)$ von g_1 mit h (dieser ist auch der Lotfußpunkt von P_2 auf g_1). Es gilt:

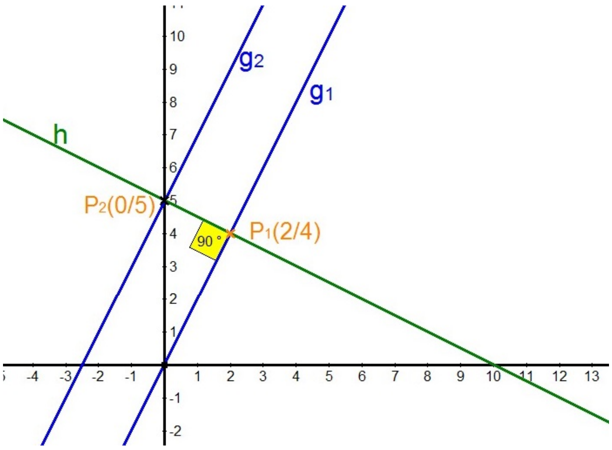
$$2x_1 = -\frac{1}{2} \cdot x_1 + 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2} \cdot x_1 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2$$

Folglich ist:

$$y_1 = 2x_1 = 2 \cdot 2 = 4 \quad \left(\text{bzw. } y_1 = -\frac{1}{2} \cdot x + 5 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 5 = 4\right)$$

Der Abstand d der beiden Geraden g_1 und g_2 entspricht dem Abstand der beiden Punkte P_1 und P_2. Es gilt:

$$d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{5}$$



(b) Analog zu (a) betrachten wir den Punkt $P_2(x_2/y_2) = P_2(0/n)$ auf g_2.

Die Gerade h, die senkrecht auf g_1 und g_2 geht und durch P_2 verläuft, hat im Fall $m \neq 0$ die Steigung $-\frac{1}{m}$ und somit die Gleichung:

$$h : y = -\frac{1}{m} \cdot (x - 0) + n = -\frac{1}{m} \cdot x + n$$

Folglich gilt für den Schnittpunkt $P_1(x_1/y_1)$ von g_1 mit h:

$$mx_1 = -\frac{1}{m} \cdot x + n \quad \Leftrightarrow \quad \left(m + \frac{1}{m}\right) \cdot x_1 = n \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{n}{\left(m + \frac{1}{m}\right)} = \frac{nm}{m^2 + 1}$$

Folglich:

$$y_1 = mx_1 = \frac{nm^2}{m^2 + 1}$$

Somit ergibt sich der gesuchte Abstand $d_{n,m}$ der beiden Geraden g_1 und g_2 als Abstand der Punkte P_1 und P_2, es gilt:

$$\begin{aligned} d_{n,m} &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{nm}{m^2+1} - 0\right)^2 + \left(\frac{nm^2}{m^2+1} - n\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{nm}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{(nm^2 - n(m^2+1)}{m^2+1}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{n^2m^2}{(m^2+1)^2} + \frac{(-n)^2}{(m^2+1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{n^2 \cdot (m^2+1)}{(m^2+1)^2}} \quad = \frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}} \end{aligned}$$

Diese (bisher nur für den Fall $m \neq 0$ hergeleitete) Formel

$$d_{n,m} = \frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}$$

stimmt auch im Fall $m = 0$, denn dann ist g_1 die x-Achse und g_2 die Parallele zur x-Achse mit der Gleichung $g_2 : y = n$. Diese beiden Geraden haben offenbar den Abstand:

$$d_{0,n} = |n| = \frac{|n|}{\sqrt{0^2+1}}$$

Aufgabe OG1:
Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, für die

$$n + 20 \quad \text{und} \quad n - 25$$

beides Quadratzahlen sind.

Begründen Sie auch, dass Sie alle geeigneten $n \in \mathbb{N}$ gefunden haben.

Lösungsvorschlag OG1:
Da $n + 20$ und $n - 25$ beides Quadratzahlen sind, existieren Zahlen $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\left\{\begin{array}{lccc} (1) & a^2 & = & n+20 \\ (2) & b^2 & = & n-25 \end{array}\right\} \overset{(1)-(2)}{\Longrightarrow} \quad a^2-b^2 = (n+20)-(n-25) = 45 \quad \overset{\text{bin. Formel}}{\Longrightarrow} \quad (a-b)(a+b) = 45 \; (\star)$$

Die Zahl 45 kann <u>nur</u> auf die folgenden drei Arten als Produkt zweier Zahlen geschrieben werden:

$$\underbrace{45 = 1 \cdot 45}_{\rightsquigarrow \text{Fall 1}} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{45 = 3 \cdot 15}_{\rightsquigarrow \text{Fall 2}} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{45 = 5 \cdot 9}_{\rightsquigarrow \text{Fall 3}}$$

Also folgt aus $(\star)$, dass:

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{lccc} & a-b & = & 1 \\ \text{und} & a+b & = & 45 \end{array}\right\}}_{\text{Fall 1}} \text{ ODER } \underbrace{\left\{\begin{array}{lccc} & a-b & = & 3 \\ \text{und} & a+b & = & 15 \end{array}\right\}}_{\text{Fall 2}} \text{ ODER } \underbrace{\left\{\begin{array}{lccc} & a-b & = & 5 \\ \text{und} & a+b & = & 9 \end{array}\right\}}_{\text{Fall 3}}$$

- In Fall 1 ergibt sich: $a = 23$ und $b = 22$

  Folglich: $n = a^2 - 20 = 23^2 - 20 = 509$ bzw. $n = b^2 + 25 = 22^2 + 25 = 509$

- In Fall 2 ergibt sich: $a = 9$ und $b = 6$

  Folglich: $n = a^2 - 20 = 9^2 - 20 = 61$ bzw. $n = b^2 + 25 = 6^2 + 25 = 61$

- In Fall 3 ergibt sich: $a = 7$ und $b = 2$

  Folglich: $n = a^2 - 20 = 7^2 - 20 = 29$ bzw. $n = b^2 + 25 = 2^2 + 25 = 29$

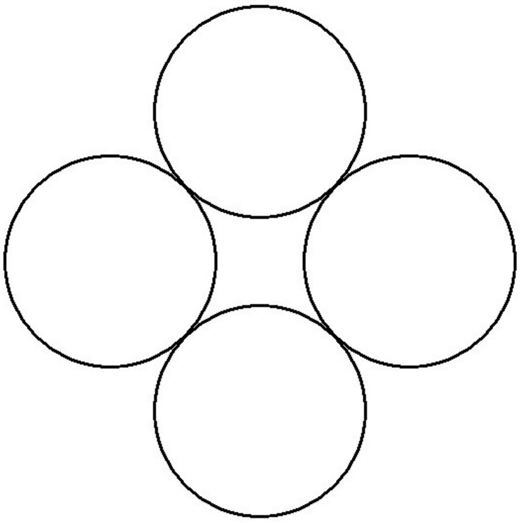
Die gesuchten Zahlen sind somit: $n = 509$ oder $n = 61$ oder $n = 29$

Aufgabe OG2:

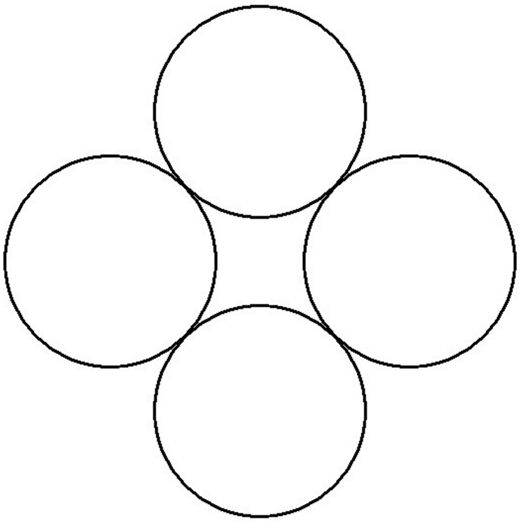
Die Mittelpunkte von 4 Kreisen mit gleichem Radius r bilden ein Quadrat. Dadurch entsteht die unten abgebildete Figur, in der jeder der Kreise jeweils zwei der anderen berührt:

Ein Beweis ist nicht erforderlich.
Es sollte aber nachvollziehbar sein, wie Sie zu den Ergebnissen gekommen sind.

(a) Wie groß ist (in Abhängigkeit vom Kreisradius r) der kleinstmögliche Flächeninhalt eines Quadrats, das alle 4 Kreise enthält?

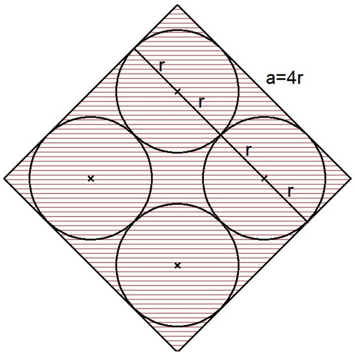


(b) Wie groß ist (in Abhängigkeit vom Kreisradius r) der größtmögliche Flächeninhalt eines Quadrats, das innerhalb der von den 4 Kreisen umschlossenen Fläche enthalten ist?



Lösungsvorschlag OG2:

(a) Der Rand des gesuchten Quadrats berührt die Kreise in Punkten, die auf den durch je zwei Mittelpunkte benachbarter Kreise festgelegten Geraden liegen.

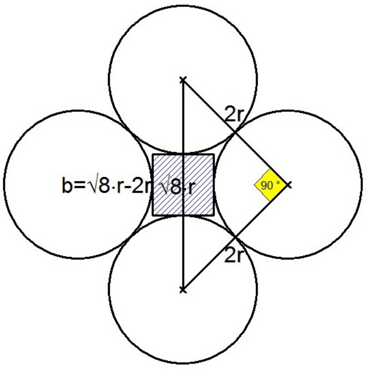


Die Seitenlänge a des Quadrats ist genauso groß wie der Abstand zweier dieser Berührpunkte, es gilt also: $a = 4r$

Folglich ist der Flächeninhalt des Quadrats gegeben durch:

$$F_{\square_1} = a^2 = (4r)^2 = 16r^2$$

(b) Der Rand des gesuchten Quadrats berührt die Kreise in Punkten, die auf den durch je zwei Mittelpunkte gegenüberliegender Kreise festgelegten Geraden liegen.



Die Seitenlänge a des Quadrats ist genauso groß wie der Abstand zweier dieser Berührpunkte.

Verbindet man drei der Kreismittelpunkte, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck. Daher ist der Abstand zweier Mittelpunkte gegenüberliegender Kreise (nach dem Satz des Pytagoras): $\sqrt{2r^2 + 2r^2} = \sqrt{8} \cdot r$

Daher ist der Abstand zweier Berührpunkte (und damit die Seitenlänge des gesuchten Quadrats): $b = \sqrt{8} \cdot r - 2 \cdot r = 2r \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$

Folglich ist der Flächeninhalt des Quadrats gegeben durch:

$$F_{\square_2} = b^2 = (2r)^2 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 4 \cdot \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot r^2$$

Aufgabe OG3:

40 rote und 60 schwarze Kugeln werden auf zwei Kisten verteilt, so dass in jeder Kiste genau 50 Kugeln liegen. (Dabei ist aber nicht bekannt, wieviele rote bzw. schwarze Kugeln in jede der beiden Kisten kommen.)

Nun wird aus jeder der beiden Kiste zufällig eine Kugel gezogen. Es bezeichne P die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man dabei zwei verschiedenfarbige Kugeln zieht.

Wie groß ist P mindestens und wie groß ist P höchstens?

Die Antworten sind auch zu begründen.

Lösungsvorschlag OG3:

Es sei $x \in \{0, \ldots, 40\}$ die Anzahl der roten Kugeln in Kiste 1. Dann befinden sich

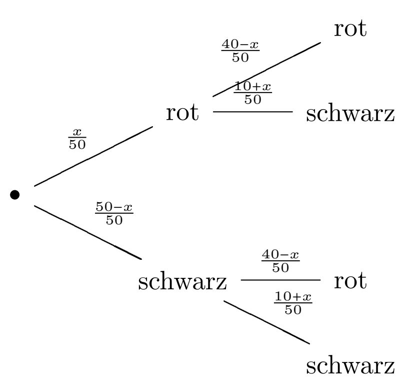
- $50 - x$ schwarze Kugeln in Kiste 1,
- $40 - x$ rote Kugeln in Kiste 2,
- $50 - (40 - x) = 10 + x$ schwarze Kugeln in Kiste 2.

Übersicht:

	rote Kugeln	schwarze Kugeln	Summe
Kiste 1	x	$50 - x$	50
Kiste 2	$40 - x$	$10 + x$	50
Summe	40	60	100

Die Wahrscheinlichkeit $P = P(x)$ für zwei verschiedenfarbige Kugeln ergibt sich dann aus folgendem Baumdiagramm:

Kiste 1 Kiste 2



Also ist:

$$P(x) = \frac{x}{50} \cdot \frac{10 + x}{50} + \frac{50 - x}{50} \cdot \frac{40 - x}{50} = \frac{2x^2 - 80x + 2000}{2500} = \frac{x^2 - 40x + 1000}{1250}$$

Wegen

$$x^2 - 40x + 1000 = x^2 - 40x + 20^2 - 20^2 + 1000 = (x - 20)^2 + 600$$

wird $P(x)$ minimial bei $x = 20$ und maximal bei $x = 0$ und $x = 40$.

Also:

- Der Mindestwert für P ist: $P(20) = \frac{600}{1250} = \frac{12}{25} = 0,48$
- Der Höchstwert für P ist: $P(0) = P(40) = \frac{20^2+600}{1250} = \frac{4}{5} = 0,8$

Aufgabe OG4:

Gegeben seien zwei Zahlen $a, b > 0$. Wir betrachten die beiden Punkte $A(0|a)$ und $B(b|0)$ in der Ebene. Die Strecke $\overline{AB}$ ist die Diagonale eines Quadrats.

Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von a und b) die Koordinaten der anderen beiden Eckpunkte dieses Quadrats.

Es sollte nachvollziehbar sein, wie Sie zu den Ergebnissen gekommen sind.

Lösungsvorschlag OG4:

Wir betrachten die Mittelsenkrechte s zu den Punkten A und B. Dann gilt:

- s geht durch den Mittelpunkt M von A und B mit den Koordinaten $M\left(\frac{b}{2}\middle|\frac{a}{2}\right)$.
- Die Steigung der Geraden durch A und B beträgt $\frac{0-a}{b-0} = -\frac{a}{b}$. Daher gilt für die Steigung m von s:

$$m \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{b}{a}$$

Also können wir mit der Punkt-Steigungs-Formel eine Funktionsgleichung von s aufstellen:

$$s(x) = \frac{b}{a} \cdot \left(x - \frac{b}{2}\right) + \frac{a}{2}$$

Sei nun $P(x|y)$ einer der beiden gesuchten zusätzlichen Eckpunkte des Quadrats.

Dann liegt P auf der Geraden s, also gilt: $y = \frac{b}{a} \cdot \left(x - \frac{b}{2}\right) + \frac{a}{2}$ (1)

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \left|\overline{PM}\right| = \left|\overline{AM}\right| \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\overline{PM}\right|^2 = \left|\overline{AM}\right|^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{a}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} \quad (2) \end{aligned}$$

Setzt man (1) in (2) ein, so folgt:

$$\frac{a^2+b^2}{4} = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{a} \cdot \left(x - \frac{b}{2}\right) + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right) \cdot \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$$

Löst man dies nach x auf, so erhält man:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \quad \overset{a>0}{\Leftrightarrow} \quad \left|x - \frac{b}{2}\right| = \frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{b-a}{2} \vee x = \frac{b+a}{2}$$

- Aus der Lösung $x_1 = \frac{b-a}{2}$ erhält man durch Einsetzen in (1):

$$y_1 = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{b-a}{2} - \frac{b}{2}\right) + \frac{a}{2} = \frac{a-b}{2}$$

- Aus der Lösung $x_2 = \frac{b+a}{2}$ erhält man durch Einsetzen in (1):

$$y_2 = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{b+a}{2} - \frac{b}{2} \right) + \frac{a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Also ist $\square AP_1BP_2$ mit

$$P_1\left(\frac{b-a}{2}\middle|\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{und} \quad P_2\left(\frac{a+b}{2}\middle|\frac{a+b}{2}\right)$$

ein Quadrat.

Aufgabe OS1:

In einem zylinderförmigen Eimer mit dem Radius 10cm steht das Wasser 30cm hoch. Nun wird ein langer, zylinderförmiger Stab aus Metall mit dem Radius 5cm (vertikal) in den Eimer gestellt.

Wie hoch steht das Wasser nun?

Wir gehen davon aus, dass das Wasser nicht überläuft.

Lösungsvorschlag OS1(1):

Das Volumen des Wassers im Eimer beträgt:

$$V = \underbrace{\pi \cdot (10\text{cm})^2}_{\text{Grundfläche } G_0} \cdot \underbrace{30\text{cm}}_{\text{Höhe } h_0} = \pi \cdot 3000\text{cm}^3$$

Nach dem Stellen des Stabes in den Eimer beträgt die von Wasser bedeckte Grundfläche nur noch:

$$G_1 = \pi \cdot (10\text{cm})^2 - \pi \cdot (5\text{cm})^2 = \pi \cdot 100\text{cm}^2 - \pi \cdot 25\text{cm}^2 = \pi \cdot 75\text{cm}^2$$

Somit ergibt sich die Höhe des Wassers nach Einstellen des Stabes als:

$$h_1 = \frac{V}{G_1} = \frac{\pi \cdot 3000\text{cm}^3}{\pi \cdot 75\text{cm}^2} = 40\text{cm}$$

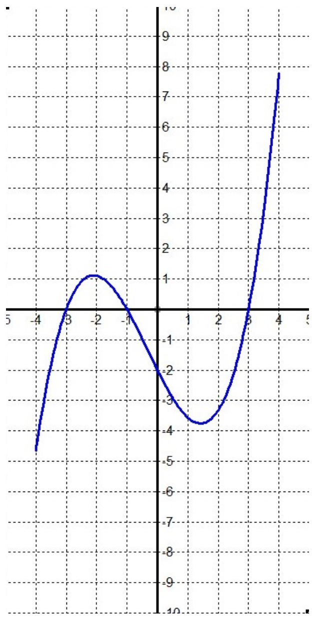
Lösungsvorschlag OS1 (2):

Der Zylinder mit halbem Radius hat $\frac{1}{4}$ der Grundfläche. Also bleibt nach dem Einstellen des Stabes nur noch $\frac{3}{4}$ der Fläche für das Wasser. Um das auszugleichen, muss sich die Höhe um den Faktor $\frac{4}{3}$ vergrößern und es ergibt sich:

$$h = \frac{4}{3} \cdot 30\text{cm} = 40\text{cm}$$

Aufgabe OS2:

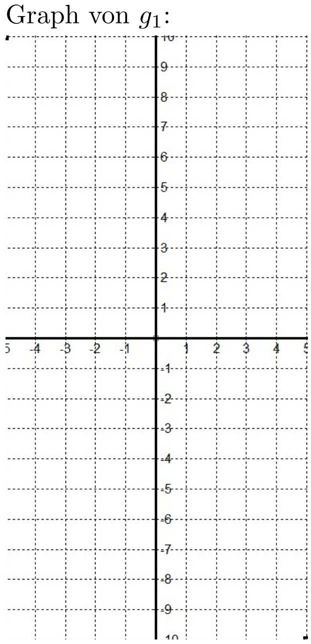
Gegeben ist der folgende Graph der Funktion: $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$



Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen $g_1, g_2, g_3 : [-4, 4] \to \mathbb{R}$ in die angegebenen Koordinatensysteme:

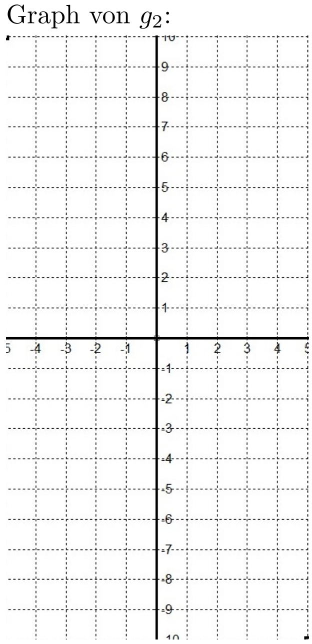
$g_1(x) = |f(x)|$

Graph von g_1:



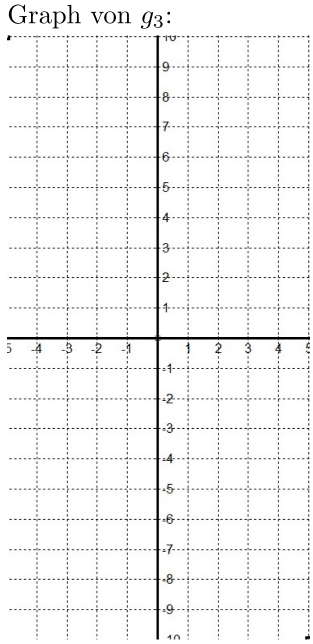
$g_2(x) = f(|x|)$

Graph von g_2:

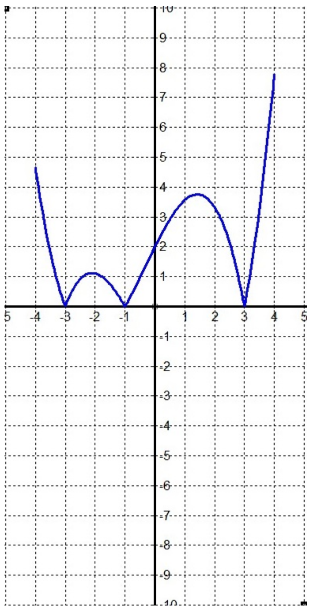
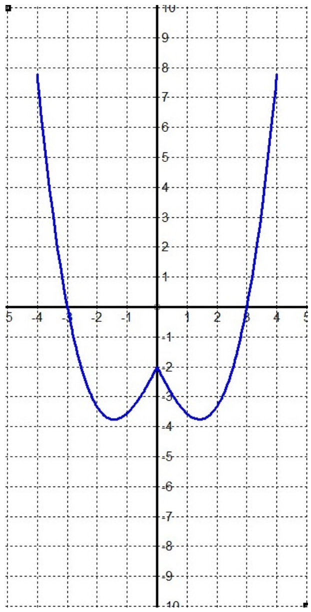
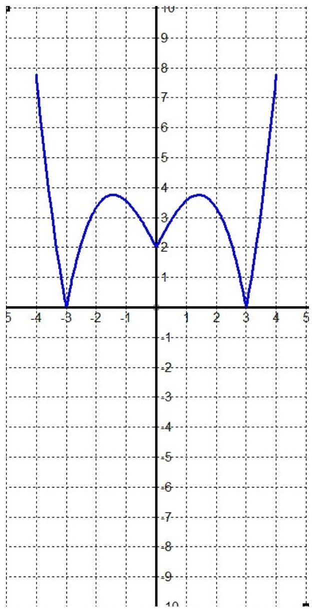


$g_3(x) = |f(|x|)|$

Graph von g_3:



Lösungsvorschlag OS2:

$g_1(x) = \lvert f(x) \rvert$	$g_2(x) = f(\lvert x \rvert)$	$g_3(x) = \lvert f(\lvert x \rvert) \rvert$
Graph von g_1:	Graph von g_2:	Graph von g_3:
		

Aufgabe OS3:
In der Fußballbundesliga erhält man bei einem Sieg 3 Punkte, bei einem Unentschieden 1 Punkt und bei einer Niederlage 0 Punkte. Eine Mannschaft hat nach 34 Spielen ein Torverhältnis von $17:17$.

Wieviele Punkte kann diese Mannschaft (theoretisch) maximal haben?

Lösungsvorschlag OS3:
Die Maximalpunktzahl ergibt sich bei folgenden Ergebnissen:

- 17 Siege mit jeweils $1:0$
- 16 Unentschieden mit jeweils $0:0$
- 1 Niederlage mit $0:17$

Damit hätte die Mannschaft:

$$17 \cdot 3 + 16 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 67 \text{ Punkte}$$

Aufgabe OS4:

Wie oft bilden der Stunden- und der Minutenzeiger zwischen 0:00 Uhr und 12:00 Uhr einen rechten Winkel?

Lösungsvorschlag OS4:

Innerhalb von 12 Stunden macht der Stundenzeiger eine Umdrehung und der Minutenzeiger 12 Umdrehungen. Der Minutenzeiger "überrundet" daher den Stundenzeiger genau 11-mal.

Bei jeder dieser 11 Überrundungen durchläuft der Winkel zwischen den beiden Zeigern den Bereich $0°$ bis $360°$. Dabei entsteht jeweils zweimal (bei $90°$ und $270°$) ein rechter Winkel.

Also bilden die beiden Zeiger innerhalb von 12 Stunden genau $11 \cdot 2 = 22$-mal einen rechten Winkel.

Aufgabe OS5:

6 Würfel (jeweils mit den Augenzahlen $1, \ldots, 6$) werden geworfen.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen gerade ist?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt der Augenzahlen gerade ist?

(Alle Würfel zeigen jede der Augenzahlen $1, \ldots, 6$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit.)

Lösungsvorschlag OS5:

(a) Unabhängig davon, was die ersten 5 Würfel zeigen, gibt es für den 6-ten Würfel stets

- 3 Augenzahlen, für die die Augensumme gerade wird,
- 3 Augenzahlen, für die die Augensumme ungerade wird.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der Augenzahlen gerade ist, beträgt also: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(b) Das Produkt der Augenzahlen ist nur ungerade, wenn alle Würfel eine ungerade Augenzahl zeien. Da jeder Würfel mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine ungerade Augenzahl zeigt, ist das Produkt der Augenzahlen nur mit der Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$ ungerade. Folglich beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Produkt der Augenzahlen gerade ist: $1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

Aufgabe OS6:
Sortieren Sie die Zahlen

$$\sqrt[2]{2} \quad , \quad \sqrt[3]{3} \quad , \quad \sqrt[6]{6} \quad , \quad \sqrt[12]{12}$$

nach der Größe.

Lösungsvorschlag OS6:
Es gilt:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[2]{2}\right)^{12} &= 2^6 &&= 64 \\ \left(\sqrt[3]{3}\right)^{12} &= 3^4 &&= 81 \\ \left(\sqrt[6]{6}\right)^{12} &= 6^2 &&= 36 \\ \left(\sqrt[12]{12}\right)^{12} &= 12^1 &&= 12 \end{aligned}$$

Damit ist:

$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^{12} > \left(\sqrt[2]{2}\right)^{12} > \left(\sqrt[6]{6}\right)^{12} > \left(\sqrt[12]{12}\right)^{12} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{3} > \sqrt[2]{2} > \sqrt[6]{6} > \sqrt[12]{12}$$

Aufgabe OS7:

Ein Punkt der innerhalb des Rechtecks $ABCD$ liegt, hat

- von A den Abstand $3cm$,
- von B den Abstand $7cm$,
- von C den Abstand $11cm$.

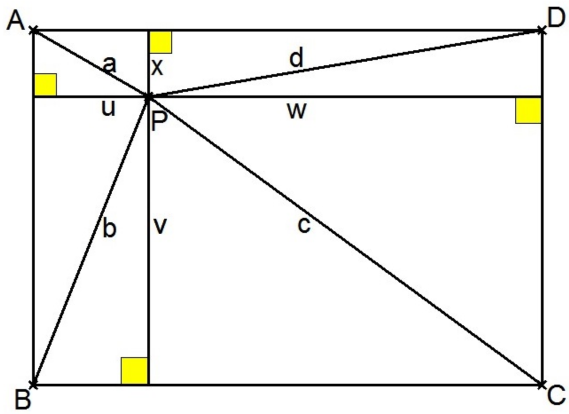
Welchen Abstand hat dieser Punkt von D?

Lösungsvorschlag OS7:

Wir bezeichnen den Punkt innerhalb des Rechtecks mit P und die Abstände zu den Eckpunkten A, B, C, D mit a, b, c, d.

Dann sind $a = 3cm$, $b = 7cm$ und $c = 11cm$ gegeben, gesucht ist d.

Weiterhin bezeichnen wir mit u, v, w, x die Abstände von P zu den Seiten des Rechtecks, wie in der folgenden Skizze angegeben.



Nach dem Satz des Pytagoras gilt:

$$\begin{array}{lcccc} \text{(I)} & a^2 & = & x^2 & + & u^2 \\ \text{(II)} & b^2 & = & u^2 & + & v^2 \\ \text{(III)} & c^2 & = & v^2 & + & w^2 \\ \text{(IV)} & d^2 & = & w^2 & + & x^2 \end{array}$$

Addiert man (I) und (III) sowie (II) und (IV), so erhält man:

$$a^2 + c^2 = x^2 + u^2 + v^2 + w^2 \quad \text{und} \quad b^2 + d^2 = u^2 + v^2 + w^2 + x^2$$

Durch Gleichsetzen folgt:

$$a^2+c^2 = b^2+d^2 \quad \Rightarrow \quad d^2 = a^2+c^2-b^2 = (3cm)^2+(11cm)^2-(7cm)^2 = 9cm^2+121cm^2-49cm^2 = 81cm^2$$

Somit erhält man: $\quad d = \sqrt{81cm^2} = 9cm$

Aufgabe OS8:

Wir betrachten die Zahl:

$a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ (Man nennt diese Zahl auch **Fakultät von 9**.)

Welches ist die größte Quadratzahl, die ein Teiler von a ist?

Lösungsvorschlag OS8:

Wir bestimmen zunächst die Primfaktorzerlegung von a:

$$a = 2 \cdot 3 \cdot \underbrace{2^2}_{=4} \cdot 5 \cdot \underbrace{2 \cdot 3}_{=6} \cdot 7 \cdot \underbrace{2^3}_{=8} \cdot \underbrace{3^2}_{=9} = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$

Falls b^2 ein Teiler von a ist, kann

- der Primfaktor 2 höchstens 3-mal in b (und damit 6-mal in b^2) vorkommen,
- der Primfaktor 3 höchstens 2-mal in b (und damit 4-mal in b^2) vorkommen,
- die Primfaktoren 5 und 7 gar nicht in b vorkommen,
- weitere Primfaktoren auch nicht in b vorkommen.

Einen möglichst großen Wert für b erhält man also mit: $b = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

Folgich ist die größte Quadratzahl, die ein Teiler von a ist:

$$b^2 = 72^2 = 5184$$