Aufgaben für die Klassenstufen 11/12

mit Lösungen

Einzelwettbewerb	Aufgaben OE1, OE2, OE3
Gruppenwettbewerb	Aufgaben OG1, OG2, OG3, OG4
Speedwettbewerb	Aufgaben OS1, OS2, OS3, OS4, OS5, OS6, OS7, OS8

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe OE1:

(a) Welche Punkte in der Ebene haben sowohl zur x-Achse, als auch zum Punkt $A = (0, 1)$ den Abstand 13 ?

(b) Die Menge aller Punkte in der Ebene, die von der x-Achse denselben Abstand haben wie vom Punkt $A = (0, 1)$ entspricht dem Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

Lösung:

(a) Gegeben sei ein Punkt $P = (x, y)$ in der Ebene.

Dann gilt:

- Der Abstand von P zur x-Achse beträgt $|y|$.
- Der Abstand von P zum Punkt $A = (0, 1)$ beträgt $\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$.

Die gesuchten Punkte $P = (x, y)$, sind also genau die, die die Gleichungen

$$\underbrace{|y| = 13}_{\text{(I)}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 13}_{\text{(II)}}$$

erfüllen.

Aus (I) erhält man: $y = -13$ <u>oder</u> $y = 13$

<u>1.Fall: $y = -13$:</u>

Setzt man dies in (II) ein, so folgt:

$$\sqrt{x^2 + (-13-1)^2} = 13 \quad \overset{\text{(Quadrieren)}}{\Longrightarrow} \quad x^2 + 198 = 169 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -29$$

Dies ist nicht möglich, also kann dieser Fall nicht eintreten.

Alternative Argumentation: y kann nicht negativ sein, da sonst der Abstand von P zur x-Achse kleiner wäre als der Abstand von P zum Punkt $A = (0, 1)$.

<u>2.Fall: $y = 13$:</u>

Setzt man dies in (II) ein, so folgt:

$$\sqrt{x^2 + (13-1)^2} = 13 \quad \overset{\text{(Quadrieren, beide Seiten > 0)}}{\Longleftrightarrow} \quad x^2 + 144 = 169 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad x = -5 \ \underline{\text{oder}}\ x = 5$$

Mit (I) folgt: $P_1 = (-5, 13)$ und $P_2 = (5, 13)$ haben zur x-Achse und zu A den Abstand 13.

(b) Sei nun $P = (x, y)$ ein Punkt in der Ebene, der von der x-Achse denselben Abstand wie vom Punkt $A = (0, 1)$ hat.

Dann gilt (vergleiche (a)):

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = y \quad \overset{\text{(Quadrieren)}}{\Longleftrightarrow} \quad x^2 + (y-1)^2 = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 = 2y \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x^2+1}{2}$$

Man beachte beim Quadrieren, dass beide Seiten > 0 sind. ($y \leq 0$ ist nicht möglich, da sonst der Abstand von P zur x-Achse kleiner wäre als der Abstand von P zum Punkt $A = (0, 1)$.)

$$\text{Also:} \quad f(x) = \frac{x^2+1}{2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

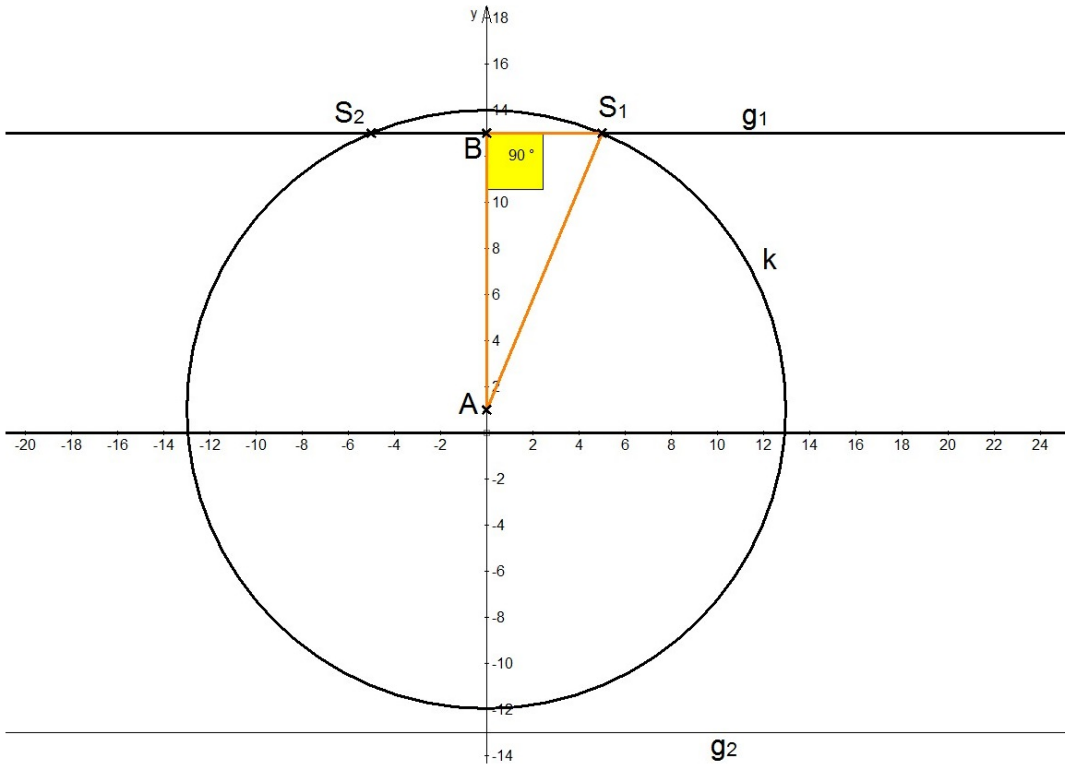
Alternativlösung zu (a):

Wir zeichnen zwei Paralellen g_1 (in der oberen Halbebene) und g_2 (in der unteren Halbebene) zur x-Achse im Abstand 13 sowie einen Kreis k um $A = (0, 1)$ mit dem Radius 13.

Offenbar kann g_2 keine Schnittpunkte mit k haben, da der Abstand eines Punkts in der unteren Halbebene zur x-Achse immer kleiner ist als der Abstand dieses Punkts zu $A = (0, 1)$.

Die Schnittpunkte von k mit g_1 bezeichnen wir mit S_1 (im ersten Quadranten) und S_2 (im zweiten Quadranten). Da g_1 den Abstand 13 zur x-Achse hat (und in der oberen Halbebene liegt), haben alle Punkte auf g_1 die y-Koordinate 13.

Außerdem sei B der Schnittpunkt von g_1 mit der x-Achse.



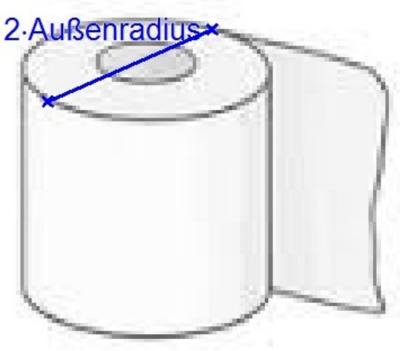
Pytagoras in $\triangle ABS_1$ liefert:

$$\left|\overline{BS_1}\right| = \sqrt{\left|\overline{AS_1}\right|^2 - \left|\overline{AB}\right|^2} = \sqrt{13^2 - (13-1)^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$$

Da S_1 im 1. Quadraten liegt, ist die x-Koordinate von S_1 also 5, damit ist $S_1 = (5, 13)$.

Analog ist $S_2 = (-5, 13)$.

Aufgabe OE2:



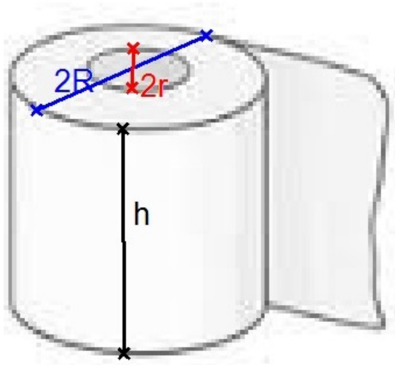
Bei einer Toilettenpapierrolle gilt:
Wenn der Außenradius nur noch halb so groß wie zu Beginn ist, ist noch $1/5$ des Papiers übrig.

Welcher Anteil des Papiers ist noch übrig, wenn der Außenradius nur noch $1/3$ so groß wie zu Beginn ist.

Hinweis: Sie können die Rolle als zylindrisch annehmen.

Lösung:

Wir bezeichnen den Außenradius der Rolle mit R, den Innenradius mit r und die Höhe mit h.



Zu Beginn ist das Volumen des Toilettenpapiers gegeben als:

$$V_0 = \pi R^2 \cdot h - \pi r^2 \cdot h = \pi h \cdot (R^2 - r^2)$$

Ist der Außenradius nur noch halb so groß wie zu Beginn, so beträgt das Volumen des Toilettenpapiers nur noch:

$$V_1 = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot h - \pi r^2 \cdot h = \pi h \cdot \left(\frac{1}{4}R^2 - r^2\right)$$

Aus $V_1 = \frac{1}{5}V_0$ ergibt sich:

$$5 = \frac{V_0}{V_1} = \frac{\pi h \cdot (R^2 - r^2)}{\pi h \cdot \left(\frac{1}{4}R^2 - r^2\right)} = \frac{R^2 - r^2}{\frac{1}{4}R^2 - r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{4}R^2 - 5r^2 = R^2 - r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}R^2 = 4r^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 = 16r^2 \quad \Rightarrow \quad R = 4r$$

Daraus folgt:

$$V_0 = \pi h \cdot (R^2 - r^2) = \pi h \cdot ((4r)^2 - r^2) = \pi h \cdot 15r^2$$

Ist der Außenradius nur noch 1/3 so groß wie zu Beginn, so beträgt das Volumen des Toilettenpapiers nur noch:

$$V_2 = \pi \left(\frac{R}{3}\right)^2 \cdot h - \pi r^2 \cdot h = \pi h \cdot \left(\frac{1}{9}R^2 - r^2\right) \overset{(R=4r)}{=} \pi h \cdot \left(\frac{16}{9}r^2 - r^2\right) = \pi h \cdot \frac{7}{9}r^2$$

Der verbleibende Anteil beträgt jetzt also:

$$\frac{V_2}{V_0} = \frac{\pi h \cdot \frac{7}{9}r^2}{\pi h \cdot 15r^2} = \frac{7}{135}$$

Aufgabe OE3:

Für eine positive reelle Zahl u bezeichen wir mit $\lfloor u \rfloor \in \mathbb{N}$ bzw. $\lceil u \rceil \in \mathbb{N}$ die Zahl, die man erhält, wenn man u auf die nächstkleinere bzw. nächstgrößere natürliche Zahl abrundet bzw. aufrundet.

Beispiele:	$\lfloor 11,6 \rfloor$	=	11	und	$\lceil 11,6 \rceil$	=	12
	$\lfloor \sqrt{5} \rfloor$	=	2	und	$\lceil \sqrt{5} \rceil$	=	3
	$\lfloor 24,01 \rfloor$	=	24	und	$\lceil 24,01 \rceil$	=	25
	$\lfloor 8 \rfloor$	=	8	und	$\lceil 8 \rceil$	=	8

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichungen

$$\text{(a)} \quad \frac{\lfloor x \rfloor}{2} = \frac{\lceil x \rceil}{3} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{x}{3} \right\rceil$$

über der Grundmenge $\mathbb{R}^+ =]0, \infty[= \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$.

Lösung 1:

(a) Wir definieren $N = \lceil x \rceil$. Da $x > 0$ muss N eine natürliche Zahl mit $N \geq 1$ sein.

- Im Fall $x \in \mathbb{N}$ ist $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = N$. Dann kann x die Gleichung aber nicht lösen, denn es ist:

$$\frac{\lfloor x \rfloor}{2} = \frac{N}{2} > \frac{N}{3} = \frac{\lceil x \rceil}{3}$$

- Ist $x \notin \mathbb{N}$, so ist nun $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil - 1 = N - 1$. Damit:

$$\frac{\lfloor x \rfloor}{2} = \frac{\lceil x \rceil}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N-1}{2} = \frac{N}{3} \quad \overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow} \quad 3N - 3 = 2N \quad \overset{-2N+3}{\Leftrightarrow} \quad N = 3$$

Die Gleichung ist also genau dann lösbar, wenn $x \notin \mathbb{N}$ und $\lceil x \rceil = 3$. Also ist die Lösungsmenge:

$$L =]2, 3[$$

(b) Wir bezeichnen $\underbrace{N = \left\lceil \frac{x}{3} \right\rceil}_{(1)}$.

Wegen $x > 0$ ist auch $\frac{x}{3} > 0$ und damit muss N eine natürliche Zahl mit $N \geq 1$ sein.

Falls x die Gleichung löst, ist auch $\underbrace{\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = N}_{(2)}$.

Es gilt:

$$(1) \qquad N = \left\lceil \tfrac{x}{3} \right\rceil \quad \Leftrightarrow \quad N - 1 < \tfrac{x}{3} \leq N \quad \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow} \quad 3N - 3 < x \leq 3N$$

$$(2) \qquad N = \left\lfloor \tfrac{x}{2} \right\rfloor \quad \Leftrightarrow \quad N \leq \tfrac{x}{2} < N + 1 \quad \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} \quad 2N \leq x < 2N + 2$$

Damit die Ungleichungen $3N - 3 < x$ und $x < 2N + 2$ beide erfüllbar sind, muss gelten:

$$3N - 3 < 2N + 2 \quad \overset{-2N+3}{\Leftrightarrow} \quad N < 5$$

Also kommen für N nur die Werte $N \in \{1, 2, 3, 4\}$ in Frage. Wir untersuchen nun für diese möglichen Werte von N nochmals die Ungleichungsketten, die wir aus (1) und (2) erhalten haben:

	Fall $N = 1$	Fall $N = 2$	Fall $N = 3$	Fall $N = 4$
(1)	$0 < x \leq 3$	$3 < x \leq 6$	$6 < x \leq 9$	$9 < x \leq 12$
(2)	$2 \leq x < 4$	$4 \leq x < 6$	$6 \leq x < 8$	$8 \leq x < 10$
(1) UND (2)	$2 \leq x \leq 3$	$4 \leq x < 6$	$6 < x < 8$	$9 < x < 10$

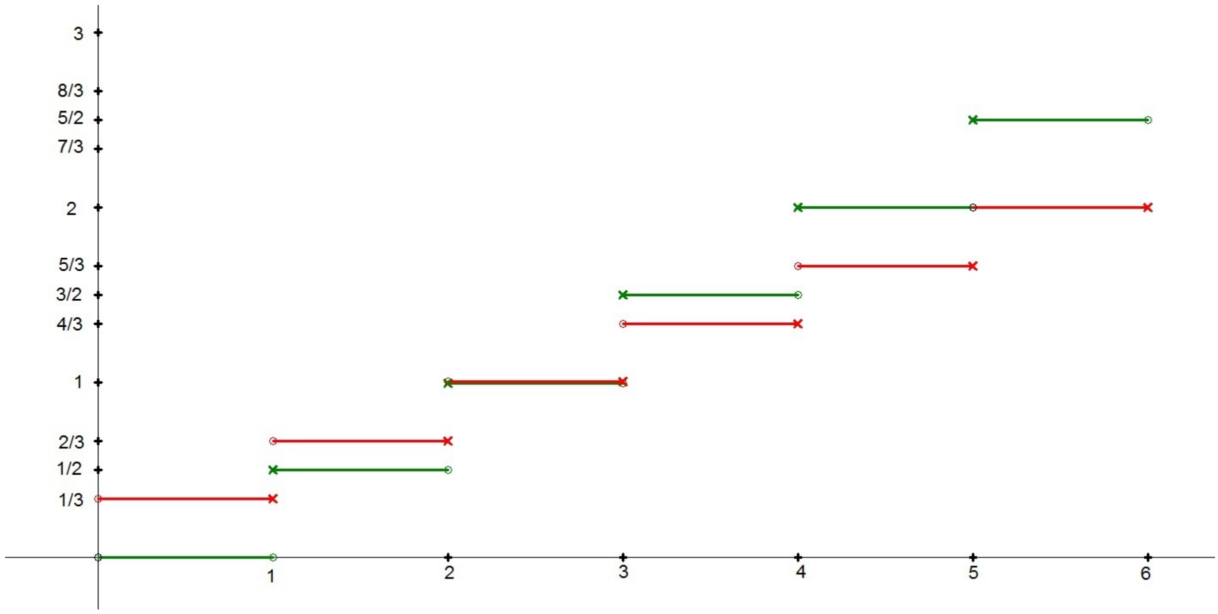
Insgesamt ergibt sich die Lösungsmenge:

$$L = [2, 3] \cup [4, 8[\setminus \{6\} \cup]9, 10[$$

Lösung 2:

(a) Wir zeichnen die Graphen der Funktionen

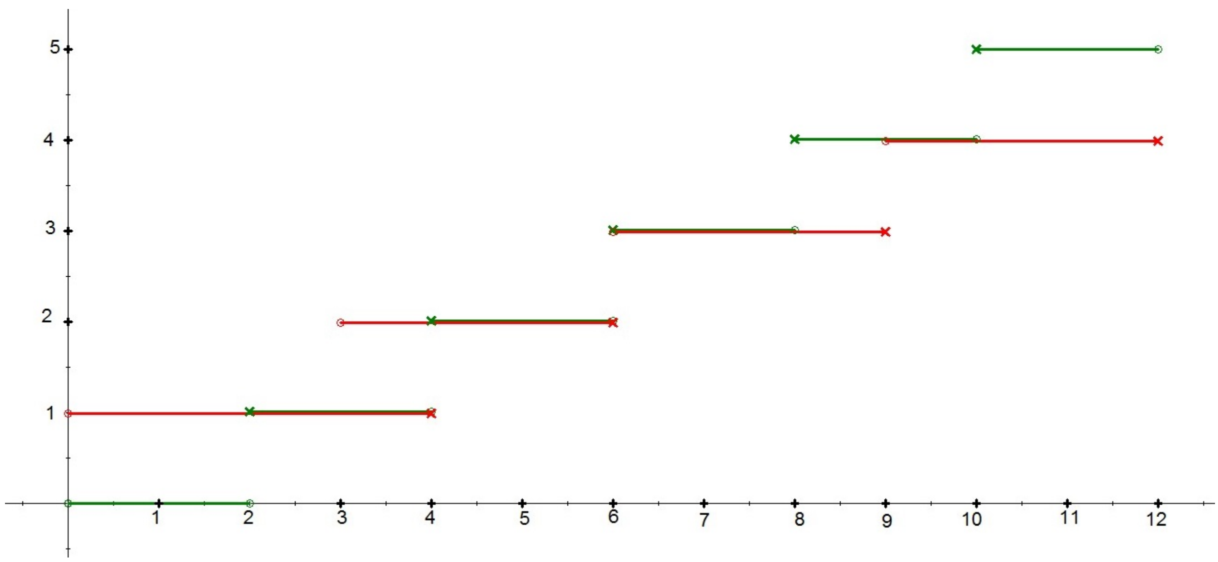
$$\underbrace{\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{2}}_{\text{grün}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\lceil x \rceil}{3}}_{\text{rot}}$$



Man kann die Lösungsmenge ablesen: $L =]2,3[$

(b) Wir zeichnen die Graphen der Funktionen

$$\underbrace{\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}_{\text{grün}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left\lceil \frac{x}{3} \right\rceil}_{\text{rot}}$$



Man kann die Lösungsmenge ablesen: $L = [2,3] \cup [4,8[\setminus \{6\} \cup]9,10]$

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe OG1:

Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts A auf der x-Achse und eines Punkts B auf dem Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$$

so dass A, B und der Ursprung $O = (0,0)$ ein gleichseitiges Dreieck $\triangle OAB$ bilden.

Lösung 1:

Wir bezeichnen die Koordinaten von A und B wie folgt: $A = (x_A, 0)$ und $B = \left(x_B, \sqrt{x_B}\right)$

Damit ergibt sich:

$$\begin{array}{llcl}
\text{Der Abstand von } O \text{ zu } A: & |\overline{OA}| = \sqrt{(x_A-0)^2+(0-0)^2} & = & \sqrt{x_A{}^2} = |x_A| \\
\text{Der Abstand von } A \text{ zu } B: & |\overline{AB}| = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(0-\sqrt{x_B})^2} & = & \sqrt{x_A{}^2-2x_Ax_B+x_B{}^2+x_B} \\
\text{Der Abstand von } B \text{ zu } O: & |\overline{BO}| = \sqrt{(x_B-0)^2+(\sqrt{x_B})^2-0} & = & \sqrt{x_B{}^2+x_B}
\end{array}$$

Diese drei Abstände müssen gleich sein, somit gilt:

$$|x_A| = \sqrt{(x_A-x_B)^2+x_B} = \sqrt{x_B{}^2+x_B} \quad \overset{\text{Quadrieren}}{\Longrightarrow} \quad x_A{}^2 = x_A{}^2 - 2x_Ax_B + x_B{}^2 + x_B = x_B{}^2 + x_B$$

Wir haben also zwei Gleichungen:

$$\begin{array}{lclclcll}
x_A{}^2 - 2x_Ax_B + x_B{}^2 + x_B = x_A{}^2 & \overset{-x_A{}^2}{\Leftrightarrow} & -2x_Ax_B + x_B{}^2 + x_B = 0 & \overset{:x_B}{\Leftrightarrow} & -2x_A + x_B + 1 = 0 & \text{(I)} \\
x_A{}^2 - 2x_Ax_B + x_B{}^2 + x_B = x_B{}^2 + x_B & \overset{-x_B{}^2-x_B}{\Leftrightarrow} & x_A{}^2 - 2x_Ax_B = 0 & \overset{:x_A}{\Leftrightarrow} & x_A - 2x_B = 0 & \text{(II)}
\end{array}$$

Man beachte bei der Division der Gleichungen durch x_A bzw. x_B, dass $x_A \neq 0$ und $x_B \neq 0$ gilt, da sonst $A = (0,0)$ oder $B = (0,0)$ gelten würde, damit würden A, B und O kein Dreieck bilden.

(I) und (II) bilden ein lineares Gleichungssystem.

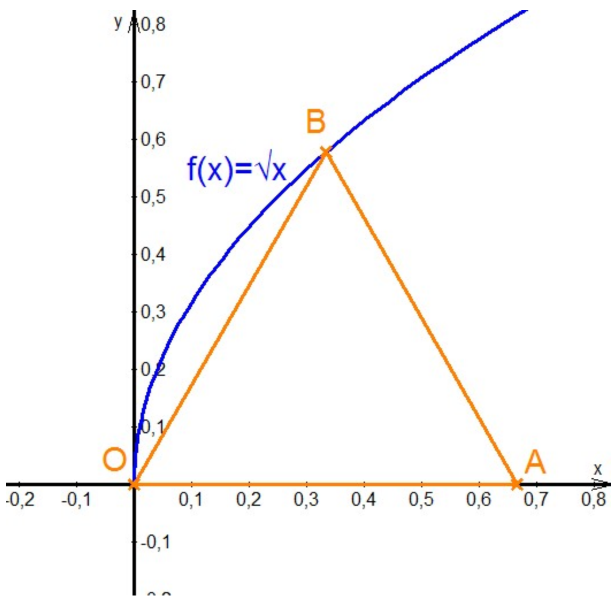
Aus (II) folgt: $x_A = 2x_B$

Setzt man dies in (I) ein, so erhält man: $-4x_B + x_B + 1 = 0 \overset{+3x_B}{\Leftrightarrow} 1 = 3x_B \overset{:3}{\Leftrightarrow} \frac{1}{3} = x_B$

Setzt man dies wiederum in (II) ein, so folgt: $x_A = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Also ergibt sich die Lösung:

$$A = \left(\frac{2}{3}, 0\right) \quad \text{und} \quad B = \left(\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

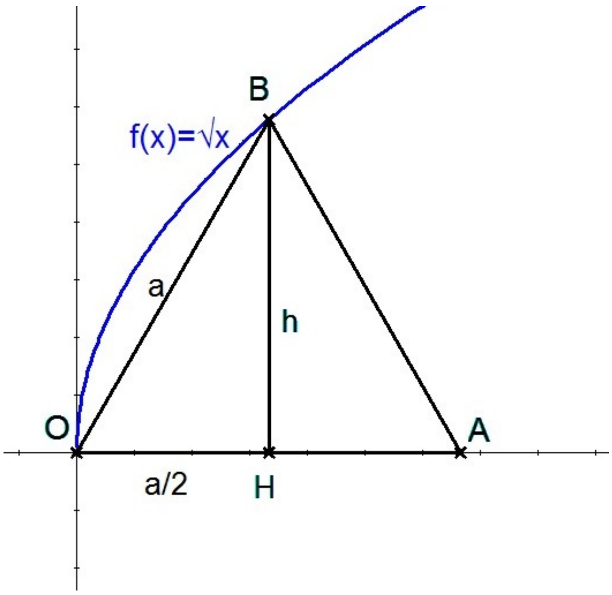


Da einige Umformungen oben keine Äquivalenzumformungen waren (Quadrieren), ist eine Probe notwendig:

$$\begin{array}{lclclcl}
|\overline{OA}| & = & |x_A| & = & \left|\frac{2}{3}\right| & = & \frac{2}{3} \\
|\overline{AB}| & = & \sqrt{x_A{}^2 - 2x_Ax_B + x_B{}^2 + x_B} & = & \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}} & = & \frac{2}{3} \\
|\overline{BO}| & = & \sqrt{x_B{}^2 + x_B} & = & \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}} & = & \frac{2}{3}
\end{array}$$

Lösung 2:

Wir bezeichnen die Seitenlänge des Dreiecks mit a, die Länge der Höhe h von B auf $\overline{AO}$ mit h und den Fußpunkt dieser Höhe mit h.



Da $\triangle OAB$ gleichseitig ist, gilt $|\overline{OH}| = \frac{a}{2}$.

Da b auf dem Graphen der Wurzelfunktion liegt, folgt daraus $h = \sqrt{\frac{a}{2}}$.

Nach dem Satz des Pytagoras im $\triangle OHB$ erhält man nun:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \sqrt{\frac{a}{2}}^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} = a^2 \quad \overset{-\frac{a^2}{4}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{a}{2} = \frac{3a^2}{4} \quad \overset{\cdot\frac{4}{3a}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{2}{3} = a$$

Damit ergibt sich:

$$A = (a, 0) = \left(\frac{2}{3}, 0\right) \quad \text{und} \quad B = \left(\frac{a}{2}, \sqrt{\frac{a}{2}}\right) = \left(\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe OG2:

Gegeben seien zwei Punkte M_1 und M_2 in einem Abstand von 10cm und zwei Kreise:

- k_1 mit Radius 1cm und Mittelpunkt M_1
- k_2 mit Radius 7cm und Mittelpunkt M_2

Eine Gerade g ist Tangente beider Kreise und berührt k_1 im Punkt B_1 und k_2 im Punkt B_2.

Bestimmen Sie den Abstand von B_1 zu B_2.

Achtung: Die Aufgabenstellung ist nicht eindeutig. Finden Sie alle möglichen Lösungen.

Lösung:

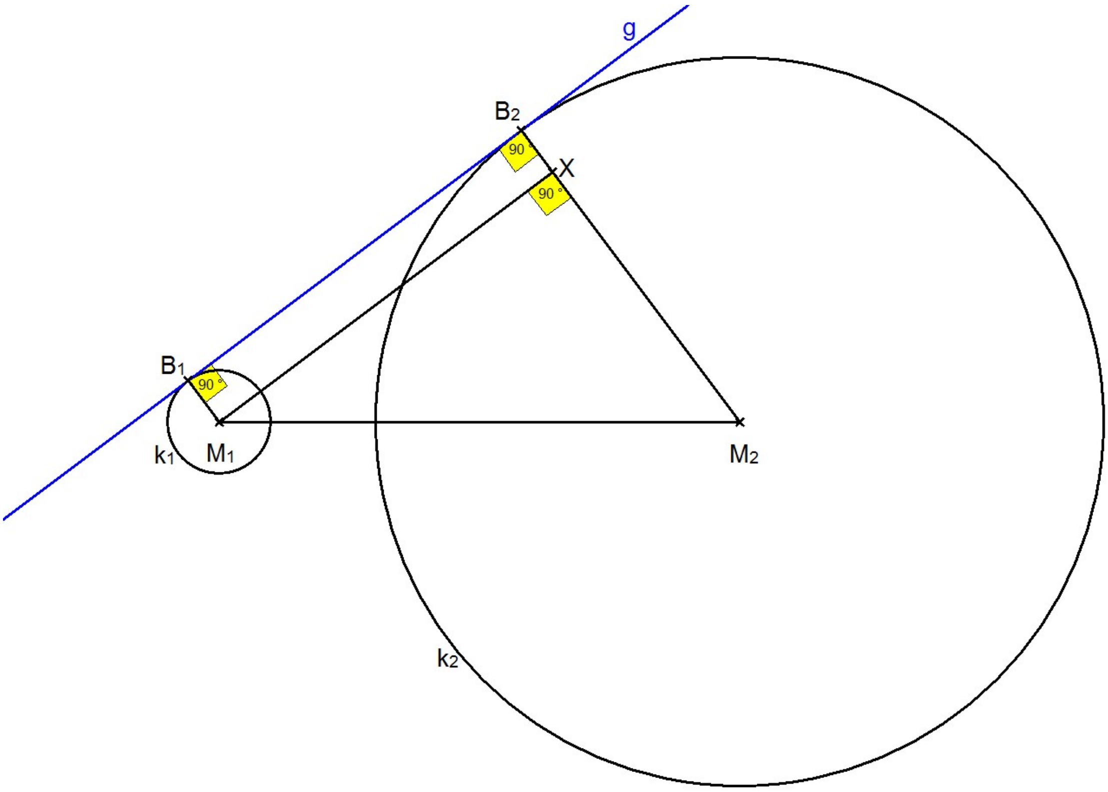
Es macht für die Lösung einen Unterschied, ob die beiden Kreise auf derselben Seite von g oder auf verschiedenen Seiten von g liegen.

<u>1. Fall</u> Beide Kreise liegen auf derselben Seite von g.

Da g Tangente an k_1 ist, gilt $\angle M_1B_1B_2 = 90°$.

Da g Tangente an k_2 ist, gilt $\angle B_1B_2M_2 = 90°$.

Wir zeichnen weiterhin eine Parallele zu g durch M_1 ein und bezeichnen den Schnittpunkt dieser Parallelen mit $\overline{M_2B_2}$ mit X. Dann ist $\square M_1XB_2B_1$ ein Rechteck.



Nun folgt: $\quad \left|\overline{B_1B_2}\right| = \left|\overline{M_1X}\right| \overset{\text{(Pytagoras)}}{=} \sqrt{\left|\overline{M_1M_2}\right|^2 - \left|\overline{M_2X}\right|^2}$

Dabei ist:

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| = 10\text{cm} \quad \text{und} \quad \left|\overline{M_2X}\right| = \left|\overline{M_2B_2}\right| - \left|\overline{B_2X}\right| = \left|\overline{M_2B_2}\right| - \left|\overline{M_1B_1}\right| = 7\text{cm} - 1\text{cm} = 6\text{cm}$$

Also:

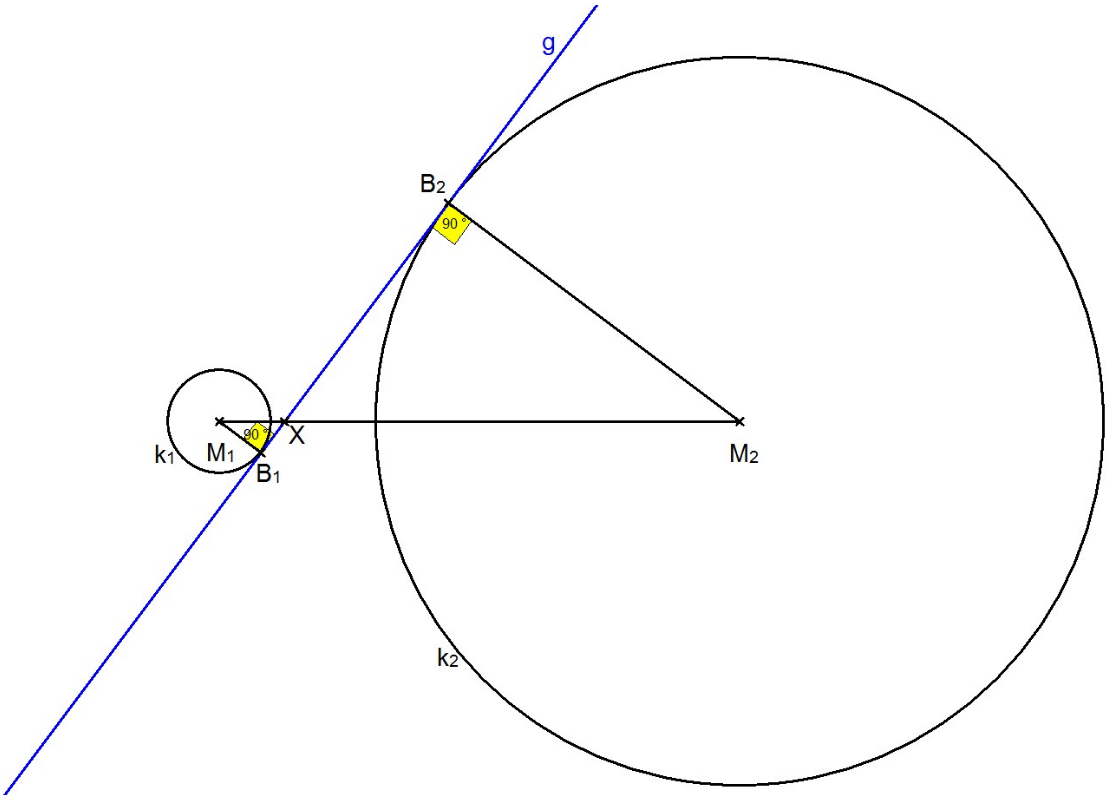
$$\left|\overline{B_1B_2}\right| = \sqrt{(10\text{cm})^2 - (6\text{cm})^2} = 8\text{cm}$$

2. Fall Beide Kreise liegen auf verschiedenen Seite von g.

Da g Tangente an k_1 ist, gilt $\angle B_2B_1M_1 = 90°$.

Da g Tangente an k_2 ist, gilt $\angle B_1B_2M_2 = 90°$.

Wir bezeichnen den Schnittpunkt von $\overline{M_1M_2}$ und g mit X.



Die Dreiecke $\triangle M_1B_1X$ und $\triangle M_2B_2X$ sind ähnlich zueinander, denn $\angle XB_1M_1 = 90° = \angle XB_2M_2$ und $\angle M_1XB_1 = \angle M_2XB_2$ (Scheitelwinkel).

$$\Rightarrow \quad \frac{|\overline{M_1X}|}{|\overline{M_1B_1}|} = \frac{|\overline{M_2X}|}{|\overline{M_2B_2}|} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\overline{M_1X}|}{1\text{cm}} = \frac{|\overline{M_2X}|}{7\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad |\overline{M_2X}| = 7 \cdot |\overline{M_1X}|$$

Zusammen mit

$$|\overline{M_1X}| + |\overline{M_2X}| = |\overline{M_1M_2}| = 10\text{cm}$$

folgt daraus:

$$|\overline{M_1X}| = \frac{1}{8} \cdot 10\text{cm} \quad \text{und} \quad |\overline{M_2X}| = \frac{7}{8} \cdot 10\text{cm}$$

Nun ergibt sich (mit dem Satz des Pytagoras in den Dreiecken $\triangle M_1B_1X$ und $\triangle M_2B_2X$):

$$\begin{aligned}
|\overline{B_1B_2}| &= |\overline{B_1X}| + |\overline{B_2X}| \\
&= \sqrt{|\overline{M_1X}|^2 - |\overline{M_1B_1}|^2} + \sqrt{|\overline{M_2X}|^2 - |\overline{M_2B_2}|^2} \\
&= \sqrt{(\frac{1}{8} \cdot 10\text{cm})^2 - (1\text{cm})^2} + \sqrt{(\frac{7}{8} \cdot 10\text{cm})^2 - (7\text{cm})^2} \\
&= \frac{1}{8} \cdot \sqrt{(10\text{cm})^2 - (8\text{cm})^2} + \frac{7}{8} \cdot \sqrt{(10\text{cm})^2 - (8\text{cm})^2} \\
&= \frac{1}{8} \cdot 6\text{cm} + \frac{7}{8} \cdot 6\text{cm} \\
&= 6\text{cm}
\end{aligned}$$

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe OG3:

In einem geschlossenen kegelförmigen Behälter aus Glas befindet sich Wasser.

Stellt man den Behälter auf die Grundfläche des Kegels steht das Wasser 1cm hoch.

Hält man den Behälter mit der Kegelspitze nach unten steht das Wasser 2cm hoch.

Bestimmen Sie die Höhe des Kegels.

Anmerkung: Sie benötigen das Wurzelzeichen, um das Ergebnis anzugeben. Sie brauchen die vorkommende(n) Wurzel(n) nicht (näherungsweise) zu berechnen.

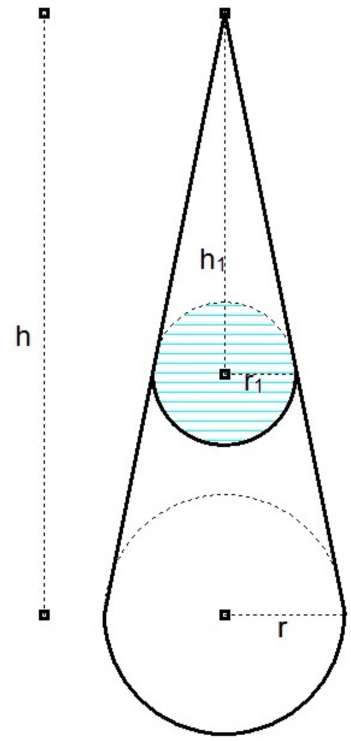
Lösung:

Wir bezeichnen das Volumen des Wassers mit V, die Höhe des Kegels mit h und den Radius seiner Grundfläche G mit r. Es gilt $G = \pi r^2$.

Wir nutzen nun die in der Aufgabe gegebenen Informationen:

1.) Stellt man den Behälter auf die Grundfläche des Kegels, so bildet das Wasser einen Kegelstumpf. Dessen Volumen ergibt sich als:

$$V = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h}_{\text{Volumen gesamter Kegel}} - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \pi {r_1}^2 \cdot h_1}_{\text{Volumen des Luftraums innerhalb des Kegels}}$$



Dabei gilt (Strahlensatz):

$$\frac{r_1}{r} = \frac{h_1}{h} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{h_1}{h} \cdot r$$

Setzt man dies oben ein, so folgt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h - \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{h_1}{h} \cdot r \right)^2 \cdot h_1 = \frac{\pi r^2}{3h^2} \cdot \left(h^3 - {h_1}^3 \right) = \frac{G}{3h^2} \cdot \left(h^3 - {h_1}^3 \right)$$

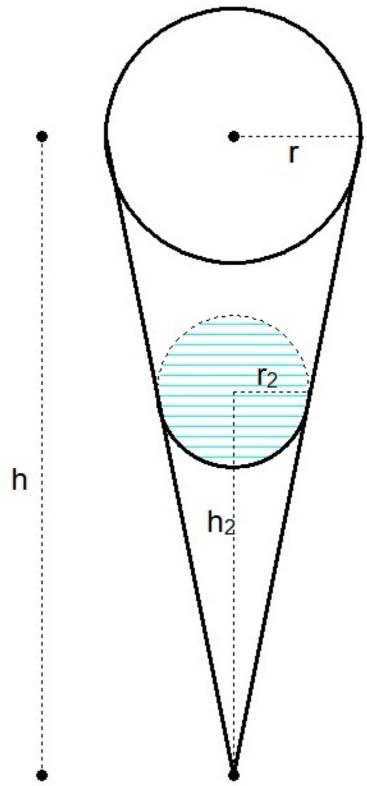
Da das Wasser 1cm hoch steht, gilt $h_1 = h - 1\text{cm}$ und folglich:

$$h^3 - {h_1}^3 = h^3 - (h - 1\text{cm})^3 = h^3 - h^3 + 3\text{cm}h^2 - 3\text{cm}^2 h + 1\text{cm}^3 = 3\text{cm}h^2 - 3\text{cm}^2 h + 1\text{cm}^3$$

Also: $$\boxed{V = \frac{G}{3h^2} \cdot \left(3\text{cm}h^2 - 3\text{cm}^2 h + 1\text{cm}^3 \right)}$$

2.) Hält man den Behälter mit der Kegelspitze nach unten, so bildet das Wasser einen Kegel. Dessen Volumen ergibt sich als:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r_2^2 \cdot h_2$$



Dabei gilt (Strahlensatz):

$$\frac{r_2}{r} = \frac{h_2}{h} \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{h_2}{h} \cdot r$$

Setzt man dies oben ein, so folgt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{h_2}{h} \cdot r \right)^2 \cdot h_2 = \frac{\pi r^2}{3h^2} \cdot {h_2}^3 = \frac{G}{3h^2} \cdot {h_2}^3$$

Da das Wasser 2cm hoch steht, gilt $h_2 = 2\text{cm}$.

Also: $\boxed{V = \frac{G}{3h^2} \cdot 8\text{cm}^3}$

Gleichsetzen von 1.) und 2.) liefert nun (nach Division durch $\frac{G}{3h^2}$):

$$3\text{cm}h^2 - 3\text{cm}^2 h + 1\text{cm}^3 = 8\text{cm}^3 \quad \overset{-1\text{cm}^3\ /\ :3\text{cm}}{\iff} \quad h^2 - 1\text{cm}h = \frac{7}{3}\text{cm}^2$$

$$\overset{+(\frac{1}{2}\text{cm})^2\ /\ \text{bin. Formel}}{\iff} \quad \left(h - \frac{1}{2}\text{cm} \right)^2 = \frac{31}{12}\text{cm}^2$$

$$\iff \quad h = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{31}{12}} \right)\text{cm} \quad \underline{\text{oder}} \quad h = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{31}{12}} \right)\text{cm}$$

Da $h > 2\text{cm}$ gelten muss, kommt nur die folgende Lösung in Frage:

$$\boxed{h = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{31}{12}} \right)\text{cm}}$$

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe OG4:

Die **Quersumme** einer natürlichen Zahl ist definiert als die Summe Ihrer Ziffern. Wie viele aufeinanderfolgende natürliche Zahlen mit lauter verschiedenen Quersummen gibt es maximal?

Geben Sie die kleinsten solchen Zahlen an.

Begründen Sie auch die Korrektheit Ihrer Lösung.

Lösung:

Es gibt maximal 20 aufeinanderfolgende Zahlen mit lauter verschiedenen Quersummen.

Die kleinsten solchen Zahlen sind: $990, 991, \dots, 1009$

Zahl	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000	1001	1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009
Quersumme	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Zur Begründung:

Wir schreiben $Q(n)$ für die Quersumme einer Zahl n. Außerdem schreiben wir abkürzend E für Einerstelle, Z für Zehnerstelle, H für Hunderterstelle, T für Tausenderstelle und ZT für Tausenderstelle.

Wir untersuchen, wie sich die Quersumme ändert, wenn man eine Zahl um 1 erhöht.

- (Änderung von E, aber nicht von Z)
  Falls die Endziffer von n von der Form $*$ mit $* \in \{0, \dots, 8\}$ ist, so gilt:
  $$Q(n+1) = Q(n) + 1$$
- (Änderung von E und Z, aber nicht von H)
  Falls die Endziffern von n von der Form $*9$ mit $* \in \{0, \dots, 8\}$ ist, so gilt:
  $$Q(n+1) = Q(n) - 9 + 1 = Q(n) - 8$$
- (Änderung von E, Z und H, aber nicht von T)
  Falls die Endziffern von n von der Form $*99$ mit $* \in \{0, \dots, 8\}$ ist, so gilt:
  $$Q(n+1) = Q(n) - 9 - 9 + 1 = Q(n) - 17$$
- (Änderung von E, Z, H und T, aber nicht von ZT)
  Falls die Endziffern von n von der Form $*999$ mit $* \in \{0, \dots, 8\}$ ist, so gilt:
  $$Q(n+1) = Q(n) - 9 - 9 - 9 + 1 = Q(n) - 26$$

1.) Wir begründen zunächst, dass es maximal 20 aufeinanderfolgende Zahlen mit lauter verschiedenen Quersummen gibt.

Es gibt 20 Zahlen mit verschiedenen Quersummen, da wir oben solche Zahlen angegeben haben.

Unter mindestens 21 aufeinanderfolgenden Zahlen gibt es aber mindestens 11 aufeinanderfolgende Zahlen, bei denen sich die Hunderterstelle nicht ändert.

Zählt man die 11 Zahlen aufsteigend, so verändert sich die Quersumme genau einmal um -8 (Änderung von E und Z, aber nicht von H) und genau 9-mal um $+1$ (Änderung von E, aber nicht von Z). Dabei muss sich die Quersumme mindestens einmal wiederholen.

2.) Nun begründen wir, dass sich bei diesen 20 Zahlen auch die Tausenderstelle ändern muss.

Wäre dies nicht der Fall, so könnte sich die Quersumme bei aufsteigendem Zählen dieser 20 Zahlen nur einmal um -17 (Änderung von E, Z und H, aber nicht von T) und sonst immer um $+1$ (Änderung von E, aber nicht von Z) verändern.

Eine Änderung um -8 (Änderung von E und Z, aber nicht von H) kann nicht auftreten, da man sonst wieder 11 aufeinanderfolgende Zahlen hätte, bei denen sich die Hunderterstelle nicht ändert. (Dies kann nicht sein, siehe 1.).)

Würde sich die Tausenderstelle nicht ändern, so könnte man also höchstens 18 aufeinanderfolgende Zahlen mit verschiedenen Quersummen (16-mal Änderung um $+1$ und 1-mal Änderung um -17) finden, ein Beispiel dafür wären die Zahlen $92, 93, \dots, 109$ mit den Quersummen $11, 12, \dots, 18, 1, 2, \dots, 10$.

Aufgabe OS1:

Bestimmen Sie eine natürliche Zahl x mit: $x^{20} = 9^{50}$

Lösung:

Da $9 = 3^2$ (und da 3 eine Primzahl ist), muss x von der Form $x = 3^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ sein.

Einsetzen liefert:

$$x^{20} = 9^{50} \quad \Leftrightarrow \quad (3^n)^{20} = \left(3^2\right)^{50} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{20n} = 3^{100} \quad \Leftrightarrow \quad 20n = 100 \quad \Leftrightarrow \quad n = 5$$

Also: $\quad x = 3^5 = 243$

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe OS2:

Knut würfelt gleichzeitig mit einem 10-seitigen Würfel, der die Augenzahlen $1, 2, \ldots, 10$ zeigt, einem 8-seitigen Würfel, der die Augenzahlen $1, 2, \ldots, 8$ zeigt und einem gewöhnlichen 6-seitigen Würfel, der die Augenzahlen $1, 2, \ldots, 6$ zeigt.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Würfel diesselbe Augenzahl zeigen?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Würfel verschiedene Augenzahlen zeigen?

(Alle Würfel zeigen jede mögliche Augenzahl mit derselben Wahrscheinlichkeit.)

Lösung:

(a) Egal, welche Augenzahl der 6-seitige Würfel zeigt, zeigt der 8-seitige Würfel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ dieselbe Augenzahl.

Ist dies der Fall, so gilt:
Egal, welche Augenzahl der 6-seitige und der 8-seitige Würfel zeigen, zeigt der 10-seitige Würfel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ dieselbe Augenzahl.

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Würfel diesselbe Augenzahl zeigen, beträgt also:

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{80}$$

(b) Egal, welche Augenzahl der 6-seitige Würfel zeigt, zeigt der 8-seitige Würfel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{7}{8}$ eine andere Augenzahl.

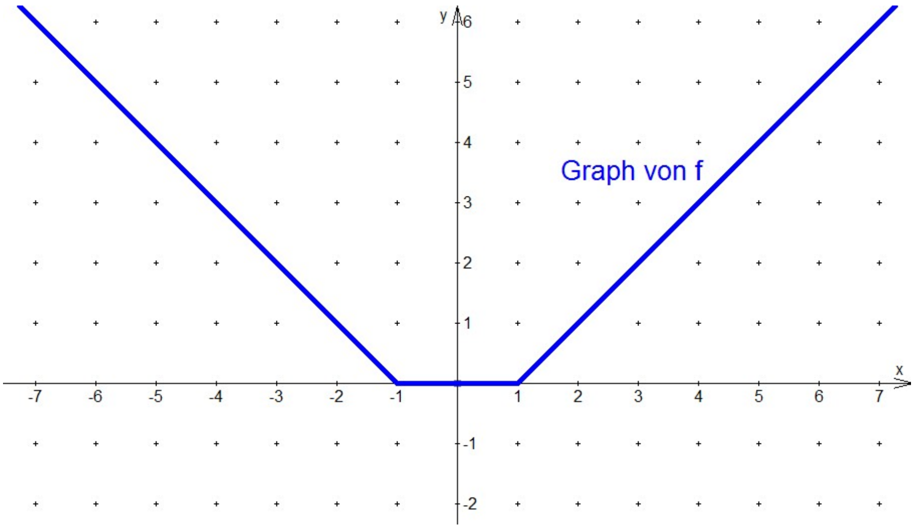
Ist dies der Fall, so gilt:
Egal, welche beiden Augenzahlen der 6-seitige und der 8-seitige Würfel zeigen, zeigt der 10-seitige Würfel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{10}$ eine andere Augenzahl.

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Würfel verschiedene Augenzahl zeigen, beträgt also:

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{8}{10} = \frac{7}{10}$$

Aufgabe OS3:

Das folgende Schaubild zeigt den Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

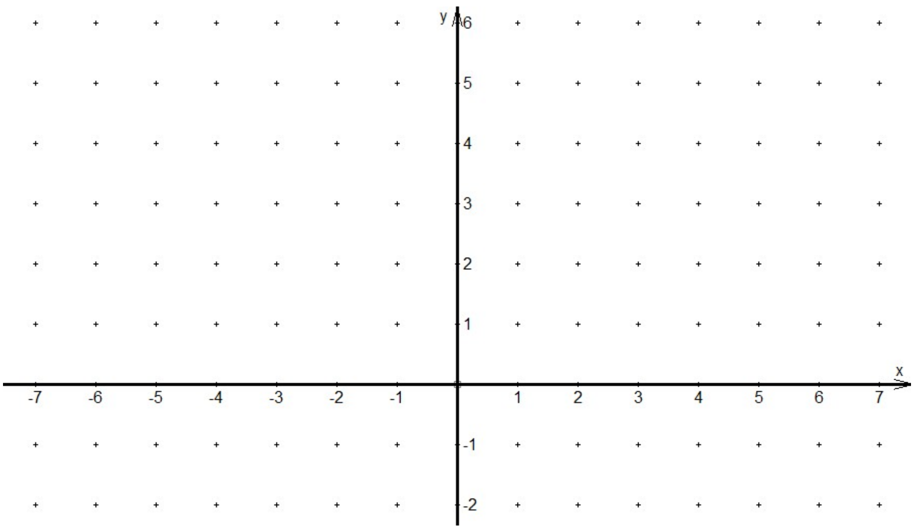


Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

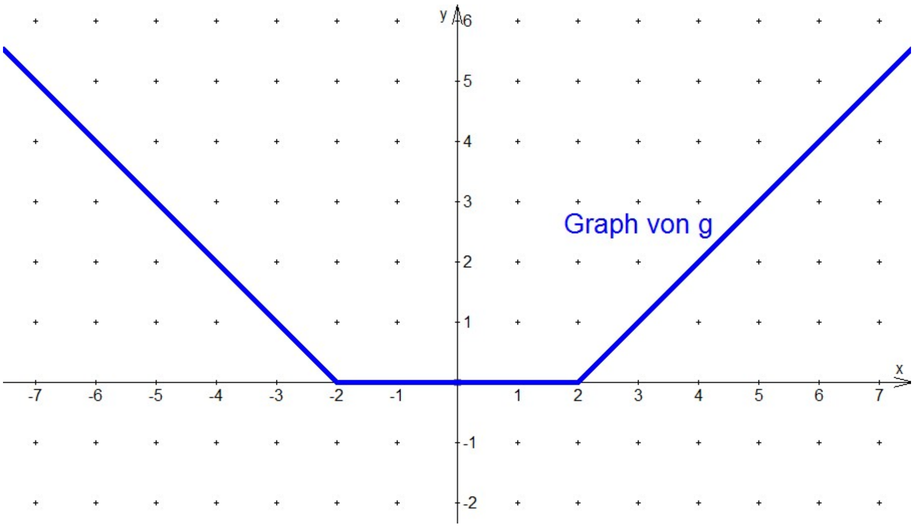
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = f(f(x))$$

Man nennt g auch die **Hintereinanderausführung** von f mit sich selbst und schreibt dafür $\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \mathbf{f}$.

in das folgende Koordinatensystem:



Lösung:



Aufgabe OS4:

99 Piraten erbeuten einen Schatz. Da die Piraten eine strenge Rangfolge untereinander haben, wird der Schatz nach folgenden Regeln verteilt:

Der 1. Pirat erhält die Hälfte des Schatzes.
Der 2. Pirat erhält ein Drittel von dem, was übrigbleibt.
Der 3. Pirat erhält ein Viertel von dem, was übrigbleibt.
Der 4. Pirat erhält ein Fünftel von dem, was übrigbleibt.
und so weiter
und so weiter
Der 99. Pirat erhält ein Hundertstel von dem, was übrigbleibt.

Der verbleibende Rest wird für die Reparatur des Schiffs verwendet. Um welchen Anteil des gesamten Schatzes handelt es sich dabei?

Lösung:

Wir untersuchen, welcher Anteil des Schatzes noch übrig ist, nachdem sich die ersten n Piraten (mit $n \in \{1, \ldots, 99\}$) ihren Teil genommen haben:

Nach dem 1. Pirat ist noch der folgende Anteil übrig:	$\frac{1}{2}$	$=$	$\frac{1}{2}$
Nach dem 2. Pirat ist noch der folgende Anteil übrig:	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$	$=$	$\frac{1}{3}$
Nach dem 3. Pirat ist noch der folgende Anteil übrig:	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$	$=$	$\frac{1}{4}$
Nach dem 4. Pirat ist noch der folgende Anteil übrig:	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$	$=$	$\frac{1}{5}$
und so weiter			
Nach dem 99. Pirat ist noch der folgende Anteil übrig:	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100}$	$=$	$\frac{1}{100}$

Es wird also genau $\frac{1}{100}$ des gesamten Schatzes für die Reparatur des Schiffes verwendet.

Aufgabe OS5:

Alex und Ben bilden ein Team bei einem Rennen, bei dem beide eine 5km lange Strecke zurücklegen müssen, wobei sie aber nur ein Fahrrad zur Verfügung haben. Es ist erlaubt, dass einer mit dem Rad vorausfährt, dieses abstellt und dann weiterläuft, und der andere zunächst läuft, das Rad aufnimmt und ins Ziel fährt. (Verboten ist es, dass beide gleichzeitig das Rad benutzen.)

Es gilt:

- Alex kann 12km/h schnell laufen.
- Ben kann 10km/h schnell laufen.
- Beide können 20km/h schnell radfahren.

Wie lange brauchen sie, um so schnell wie möglich (beide) ins Ziel zu kommen? Geben Sie das Ergebnis in Minuten an.

Lösung:

Sie kommen am schnellsten ins Ziel, wenn der Vorausfahrende (egal welcher von beiden), das Rad so abstellt, dass beide gleichzeitig ins Ziel kommen.

Sei x die Strecke, die Alex läuft. Dann muss er die Strecke $5\text{km} - x$ mit dem Rad fahren. Insgesamt benötigt er also die Zeit:

$$T_A = \frac{x}{12\text{km/h}} + \frac{5\text{km} - x}{20\text{km/h}}$$

Entsprechend läuft Ben die Strecke $5\text{km} - x$ und fährt die Strecke x mit dem Rad. Insgesamt benötigt er also die Zeit:

$$T_B = \frac{5\text{km} - x}{10\text{km/h}} + \frac{x}{20\text{km/h}}$$

Bei richtiger Taktik gilt also:

$$\begin{aligned}
T_A = T_B \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{12\text{km/h}} + \frac{5\text{km} - x}{20\text{km/h}} = \frac{5\text{km} - x}{10\text{km/h}} + \frac{x}{20\text{km/h}} \\
&\overset{\cdot 60\text{km/h}}{\Leftrightarrow} \quad 5x + 3(5\text{km} - x) = 6(5\text{km} - x) + 3x \\
&\Leftrightarrow \quad 2x + 15\text{km} = 30\text{km} - 3x \\
&\Leftrightarrow \quad 5x = 15\text{km} \\
&\Leftrightarrow \quad x = 3\text{km}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $T_A = T_B$:

$$\begin{aligned}
T_A &= \tfrac{3\text{km}}{12\text{km/h}} + \tfrac{5\text{km}-3\text{km}}{20\text{km/h}} = 0.25\text{h} + 0.1\text{h} = 0.35\text{h} \\
\text{bzw.} \quad T_B &= \tfrac{5\text{km}-3\text{km}}{10\text{km/h}} + \tfrac{3\text{km}}{20\text{km/h}} = 0.2\text{h} + 0.15\text{h} = 0.35\text{h}
\end{aligned}$$

Sie benötigen im Idealfall also 0.35 Stunden, dies enstpricht $0.35 \cdot 60 = \frac{7}{20} \cdot 60 = 7 \cdot 3 = 21$ Minuten.

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe OS6:

Der sogenannte **goldene Schnitt** ist eine Zahl $\varphi > 1$, die die Gleichung

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

erfüllt. Bestimmen Sie Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^8 = a \cdot \varphi + b$.

Lösung:

Es gilt:

$$\varphi^4 = \left(\varphi^2\right)^2 = (\varphi + 1)^2 = \varphi^2 + 2\varphi + 1 = \varphi + 1 + 2\varphi + 1 = 3\varphi + 2$$

Daraus folgt:

$$\varphi^8 = \left(\varphi^4\right)^2 = (3\varphi + 2)^2 = 9\varphi^2 + 12\varphi + 4 = 9(\varphi + 1) + 12\varphi + 4 = 21\varphi + 13$$

Also ist: $a = 21$ und $b = 13$

Anmerkung: Allgemeiner gilt $\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, wobei F_n die n-te Fibonacci-Zahl ist.

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe OS7:

Die Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$ werden in eine zufällige Reihenfolge gebracht. Dabei entsteht eine Zahl N.

(Es ist dabei auch erlaubt, dass die Ziffer 0 ganz vorn steht. In diesem Fall hat sie auf N keine Auswirkung.)

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass N durch 9 teilbar ist.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass N durch 25 teilbar ist.

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass N durch 225 teilbar ist.

Lösung:

(a) Eine Zahl ist genau dann duch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Da die Quersumme der Zahl N immer

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

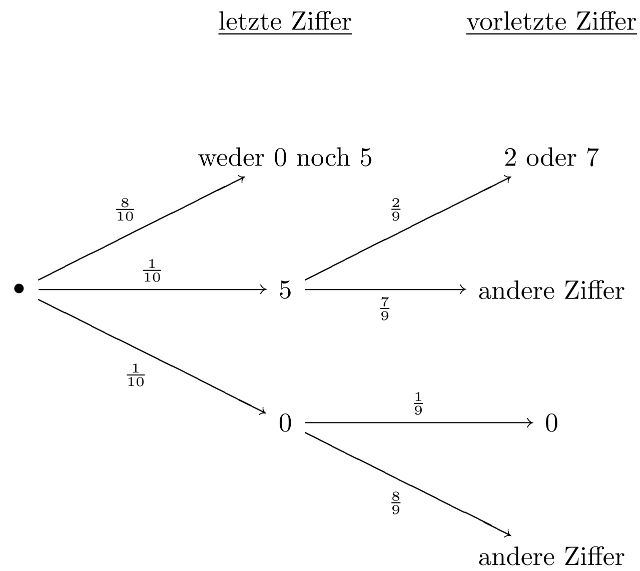
beträgt, und 45 durch 9 teilbar ist, ist N in jedem Fall durch 9 teilbar.

Die Wahrscheinlichkeit, dass N durch 9 teilbar ist, beträgt also 1.

(b) Eine Zahl ist genau dann duch 25 teilbar, wenn die aus den letzten beiden Ziffern der Zahl gebildete Zahl durch 25 teilbar ist, also $00, 25, 50$ oder 75 ist.

Da nur eine Null zur Verfügung steht, kann N nicht auf 00 enden.

Lösung mit einem Baumdiagramm:



Die Wahrscheinlichkeit, dass N durch 25 teilbar ist, beträgt also: $\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{30}$

Kombinatorische Lösung:
Es gibt $10\cdot 9=90$ Möglichkeiten für die letzten beiden Endziffern, bei genau 3 davon ist N durch 25 teilbar.

Die Wahrscheinlichkeit, dass N durch 25 teilbar ist, beträgt also: $\frac{3}{90}=\frac{1}{30}$

(c) N ist genau dann durch $225=9\cdot 25$ teilbar, wenn N durch 9 und durch 25 teilbar ist.

Da N immer durch 9 teilbar ist (a), ist die Wahrscheinlichkeit, dass N durch 225 teilbar ist, hier gleich der Wahrscheinlichkeit, dass N durch 25 teilbar ist, entspricht also $\frac{1}{30}$ (b).

Aufgabe OS8:

Gegeben sei ein regelmäßiges 12-Eck.

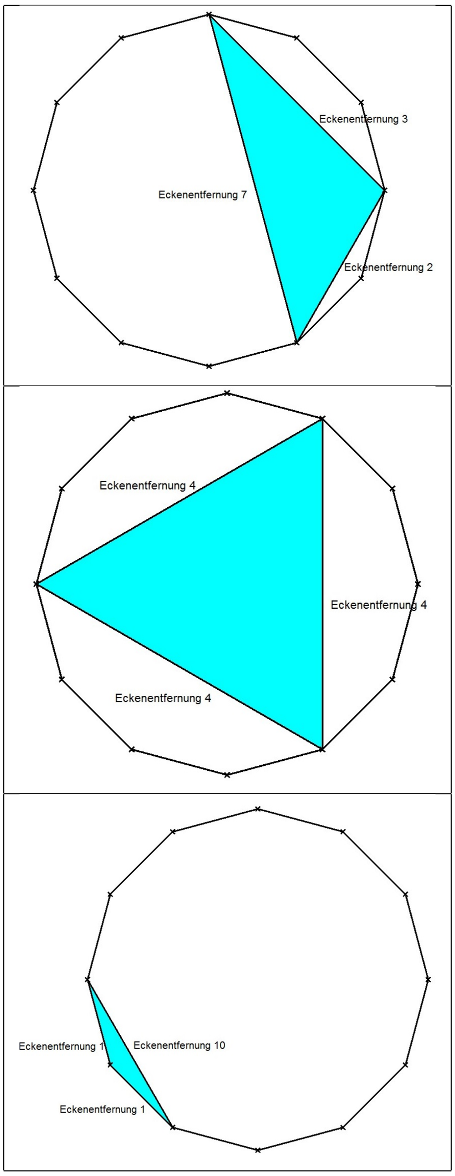
(a) Wie viele jeweils zueinander nicht-kongruente Dreiecke, deren Eckpunkte auch Eckpunkte des 12-Ecks sind, gibt es?

(b) Wie viele dieser Dreiecke sind rechtwinklig?

Lösung:

Für ein Dreieck $\triangle ABC$, dessen Eckpunkte A, B, C auch Ecken des 12-Ecks sind, definieren wir die **"Eckenentfernungen des Dreiecks"**, als die Anzahlen der Kanten des 12-Ecks zwischen den Punkten A, B und C, wenn man das 12-Eck umläuft.

Diese Eckenentfernungen müssen sich immer zu 12 addieren. Hier einige Beispiele:



(a) Es gilt (Kongruenzsatz SSS):

$\boxed{\text{Zwei der Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn sie diesselben Eckenentfernungen haben.}}$

Also gibt es unter diesen Dreiecken genau so viele paarweise nicht-kongruente Dreiecke, wie es verschiedene Summen aus 3 Summanden gibt, deren Wert 12 ist. Diese lassen sich auflisten:

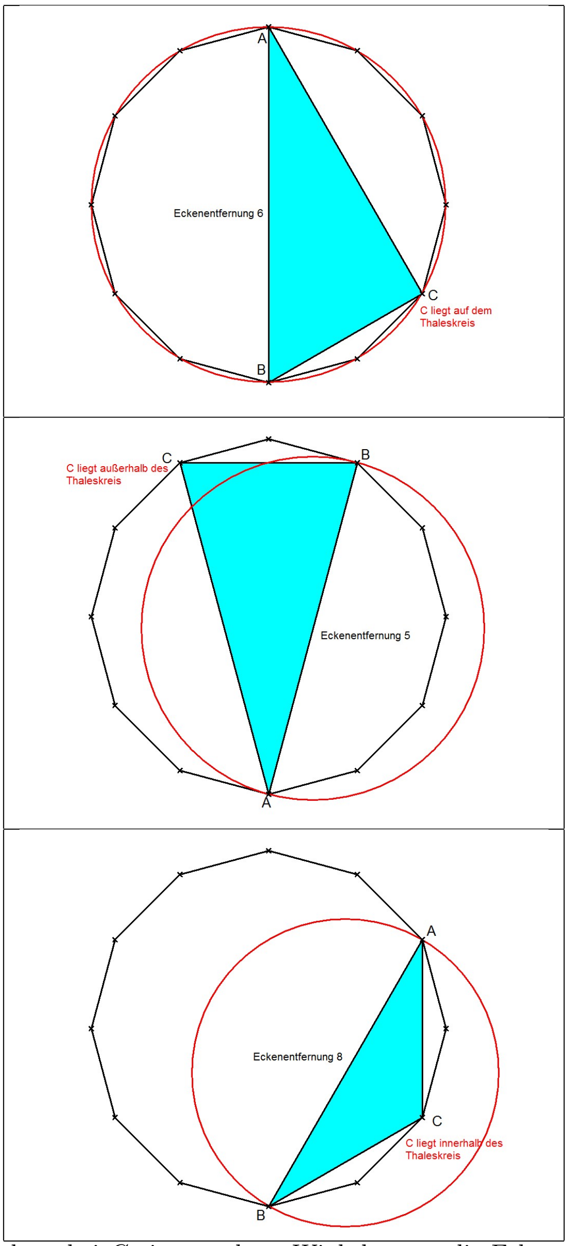
$1+1+10=12$	$2+2+8=12$	$3+3+6=12$	$4+4+4=12$
$1+2+9=12$	$2+3+7=12$	$3+4+5=12$	
$1+3+8=12$	$2+4+6=12$		
$1+4+7=12$	$2+5+5=12$		
$1+5+6=12$			

Man sieht: Es gibt $5+4+2+1=12$ solche Summen und damit auch 12 jeweils zueinander nicht-kongruente Dreiecke, deren Eckpunkte auch Eckpunkte des 12-Ecks sind.

(b) Es gilt:

Eines der Dreiecke ist genau dann rechtwinklig, wenn es die Eckenentfernung 6 hat.

Begründung: Für eines der Dreiecke $\triangle ABC$ betrachten wir den Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$.
Haben A und B die Eckenentfernung 6, so ist $\overline{AB}$ auch der Durchmesser des Kreises, auf dem alle Eckpunkte des 12-Ecks liegen. Somit liegt dann auch C auf diesem Kreis. Nach dem Satz des Thales hat dann $\triangle ABC$ bei C einen rechten Winkel.
Haben A und B eine Eckenentfernung < 6, so liegt C außerhalb des Kreises, damit (Umkehrung Satz des Thales) hat $\triangle ABC$ bei C keinen rechten Winkel.
Haben A und B eine Eckenentfernung > 6, so liegt C innerhalb des Kreises, damit (Umkehrung Satz des Thales) hat $\triangle ABC$ bei C keinen rechten Winkel.



Also hat $\triangle ABC$ genau dann bei C einen rechten Winkel, wenn die Eckenentfernung von A und B genau 6 ist.
Analog hat $\triangle ABC$ genau dann bei B einen rechten Winkel, wenn die Eckenentfernung von A und C genau 6 ist und genau dann bei A einen rechten Winkel, wenn die Eckenentfernung von C und B genau 6 ist.

Da es in (a) drei Summen gibt, in denen der Summand 6 vorkommt ($1+5+6=12,\ 2+4+6=12,\ 3+3+6=12$) sind genau 3 der Dreiecke rechtwinklig.