Institut für MATHEMATIK

Aufgaben für die Klassenstufen 9/10

mit Lösungen

Einzelwettbewerb	Aufgaben ME1, ME2, ME3
Gruppenwettbewerb	Aufgaben MG1, MG2, MG3, MG4
Speedwettbewerb	Aufgaben MS1, MS2, MS3, MS4, MS5, MS6, MS7, MS8

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe ME1:

Bei einer Uhr mit Ziffernblatt werden:

- die 12 und die 4 mit einer Strecke verbunden
- die 8 und die 3 mit einer Strecke verbunden

In welchem Winkel schneiden sich die beiden Strecken.

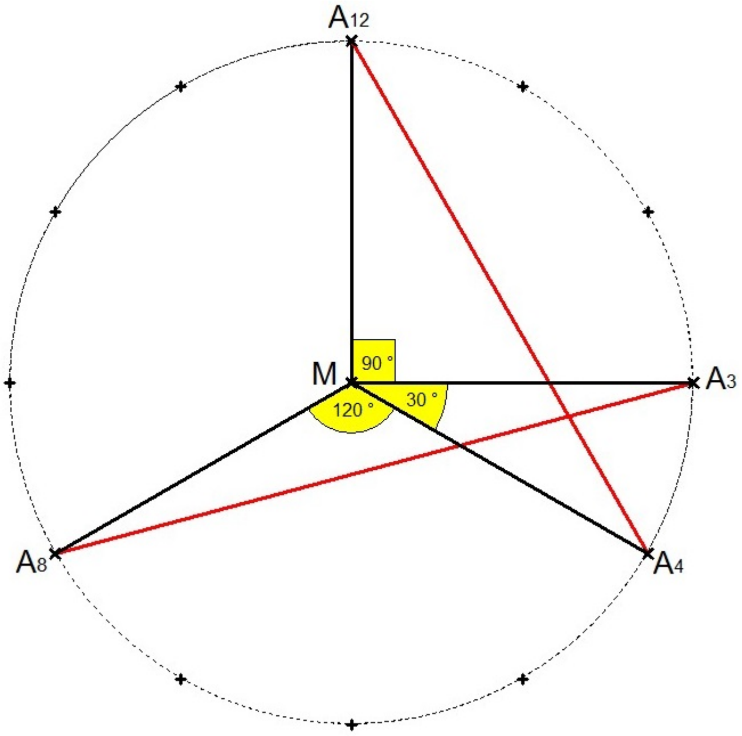
Anmerkung: Gehe davon aus, dass die Zahlen $1, \ldots, 12$ in regelmäßigen Abständen auf einem Kreis liegen.

Lösung:

Wir nennen die Punkte, in denen die Ziffern $1, \ldots, 12$ liegen $A_1, \ldots, A_{12}$.

Es gilt:

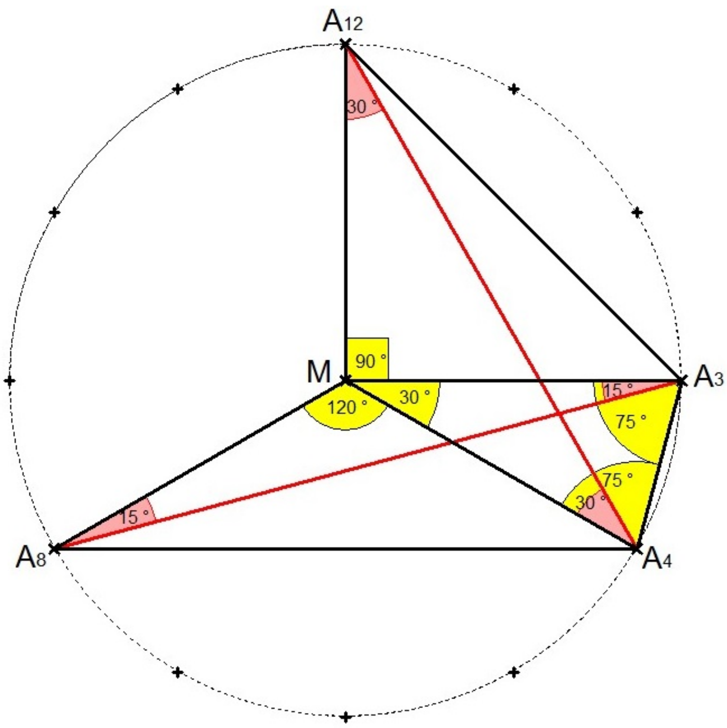
$$\begin{array}{lclcl} \angle A_8MA_4 & = & \frac{4}{12}\cdot 360° & = & 120° \\ \angle A_4MA_3 & = & \frac{1}{12}\cdot 360° & = & 30° \\ \angle A_3MA_{12} & = & \frac{3}{12}\cdot 360° & = & 90° \end{array}$$



Da $\triangle A_4MA_3$ gleichschenklig ist, folgt: $\angle MA_4A_3 = \angle A_4A_3M = \frac{180°-30°}{2} = 75°$

Da $\triangle A_3MA8$ gleichschenklig ist, folgt: $\angle A_8A_3M = \frac{180°-(120°+30°)}{2} = 15°$

Da $\triangle A_4MA_{12}$ gleichschenklig ist, folgt: $\angle MA_4A_{12} = \frac{180°-(30°+90°)}{2} = 30°$



Nun betrachten wir den Schnittpunkt S der in der Aufgabe genannten Strecken und untersuchen die Winkel im $\triangle A_4A_3S$.

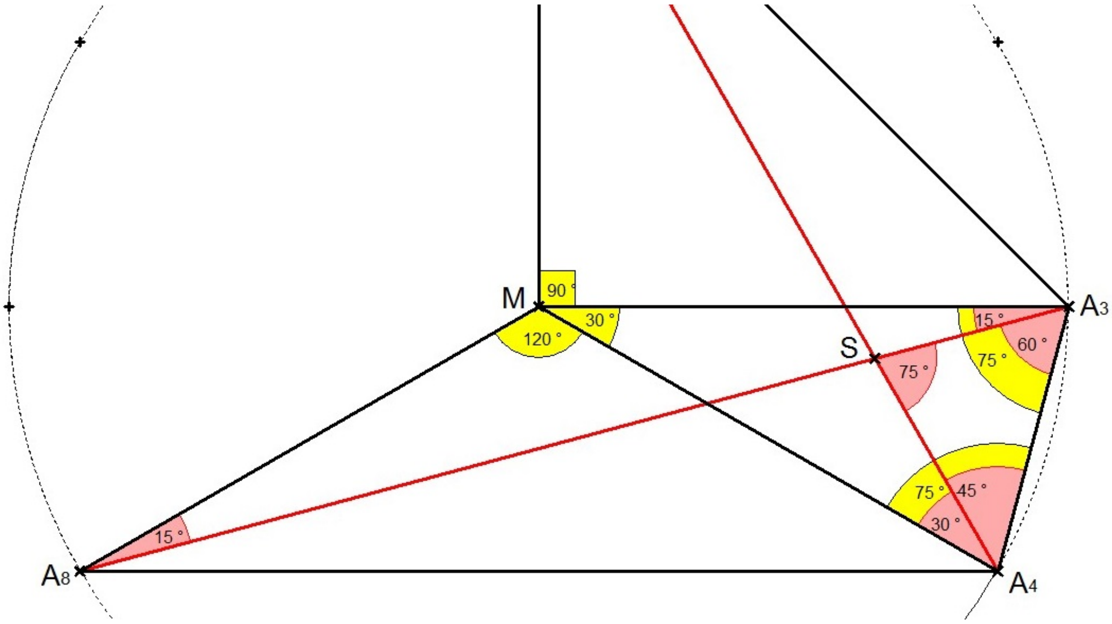
Es gilt:

$$\angle SA_4A_3 = \angle MA_4A_3 - \underbrace{\angle MA_4A_S}_{=\angle MA_4A_{12}} = 75° - 30° = 45°$$

$$\angle A_4A_3S = \angle A_4A_3M - \underbrace{\angle SA_3M}_{=\angle A_8A_3M} = 75° - 15° = 60°$$

Daraus folgt (Winkelsumme im Dreieck):

$$\angle A_3SA_4 = 180° - \angle SA_4A_3 - \angle A_4A_3S = 180° - 45° - 60° = 75°$$



Die beiden Strecken schneiden sich in einem Winkel von 75°.

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe ME2:

Auf einem Parkplatz stehen PKW und LKW.

- Es kommen 10 PKW dazu. Dadurch steigt der Anteil der PKW an allen Fahrzeugen um 10 Prozentpunkte.
- Danach kommen nochmal 10 PKW dazu. Dadurch steigt der Anteil der PKW an allen Fahrzeugen um weitere 5 Prozentpunkte.

Zum Begriff **"Prozentpunkt"** folgendes Beispiel:
Steigt ein Anteil von 50% auf 70%, so hat er sich um 20 Prozentpunkte erhöht.

Wie viele PKW und LKW befanden sich ursprünglich auf dem Parkplatz?

TAG DER MATHEMATIK 2017

Lösung:

Es bezeichne:

$$
\begin{aligned}
P &= \text{Anzahl der PKW zu Beginn} \\
L &= \text{Anzahl der LKW zu Beginn} \\
N &= \text{Anzahl aller Fahrzeuge zu Beginn} = P + L
\end{aligned}
$$

Nach den gegebenen Informationen gilt:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad \frac{P+10}{N+10} = \frac{P}{N} + 0.1 \quad &\overset{\cdot N(N+10)}{\Leftrightarrow} \quad N(P+10) = (N+10)P + 0.1N(N+10) \\
&\Leftrightarrow \quad NP + 10N = NP + 10P + 0.1N^2 + N \\
&\overset{-NP-0.1N^2-N}{\Leftrightarrow} \quad 9N - 0.1N^2 = 10P \\
&\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} \quad 18N - 0.2N^2 = 20P
\end{aligned}
$$

Die letzte Umformung wurde mit einem Blick auf die zweite Gleichung (siehe unten) gewählt.

$$
\begin{aligned}
(2)\quad \frac{P+20}{N+20} = \frac{P}{N} + 0.15 \quad &\overset{\cdot N(N+20)}{\Leftrightarrow} \quad N(P+20) = (N+20)P + 0.15N(N+20) \\
&\Leftrightarrow \quad NP + 20N = NP + 20P + 0.15N^2 + 3N \\
&\overset{-NP-0.15N^2-3N}{\Leftrightarrow} \quad 17N - 0.15N^2 = 20P
\end{aligned}
$$

Gleichsetzen liefert nun:

$$
\begin{aligned}
18N - 0.2N^2 = 17N - 0.15N^2 \quad &\overset{-17N+0.15N^2}{\Leftrightarrow} \quad N - 0.05N^2 = 0 \\
&\overset{:0.05}{\Leftrightarrow} \quad 20N - N^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad N(20-N) = 0 \\
&\overset{:N\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad 20 - N = 0 \\
&\overset{+20}{\Leftrightarrow} \quad N = 20
\end{aligned}
$$

Setzt man dies (z.B.) in (I) ein, so folgt:

$$
20P = 18\cdot 20 - 0.220^2 \quad \overset{:20}{\Leftrightarrow} \quad P = 18 - 0.2\cdot 20 \quad \Leftrightarrow \quad P = 14
$$

Somit befanden sich auf dem Parkplatz zu Beginn $P = 14$ PKW und $L = N - P = 20 - 14 = 6$ LKW.

PROBE	PKW	LKW	gesamt	Anteil der PKW
zu Beginn:	14	6	20	$\frac{14}{20} = 0.7$
10 PKW kommen hinzu:	24	6	30	$\frac{24}{30} = 0.8$
weitere 10 PKW kommen hinzu:	34	6	40	$\frac{34}{40} = 0.85$

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe ME3:

Für eine reelle Zahl $u \in \mathbb{R}$ bezeichen wir mit $\lfloor u \rfloor \in \mathbb{Z}$ die Zahl, die man erhält, wenn man u auf die nächstkleinere ganze Zahl abrundet.

Beispiele:

$\lfloor 11,6 \rfloor = 11$ $\lfloor -11,6 \rfloor = -12$ $\lfloor 24,99 \rfloor = 24$ $\lfloor 8 \rfloor = 8$

(a) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung:

$$\left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor = 4$$

(b) Zeichne den Graphen der Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor$$

(c) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung:

$$\left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor = x$$

(d) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung:

$$\left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

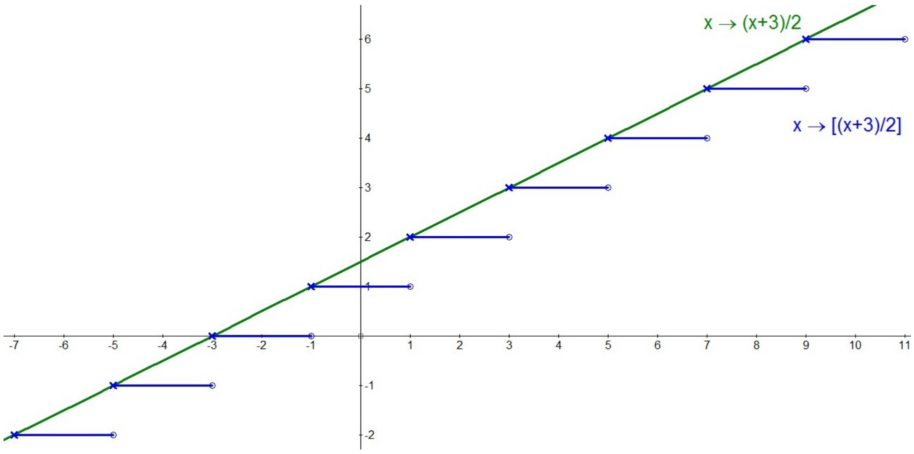
Lösung:

(a) Die Zahlen, die auf 4 abgerundet werden, sind genau die Zahlen, die im Intervall $[4,5[$ liegen. Also:

$$\left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \leq \frac{x+3}{2} < 5 \quad \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} \quad 8 \leq x+3 < 10 \quad \overset{-3}{\Leftrightarrow} \quad 5 \leq x < 7$$

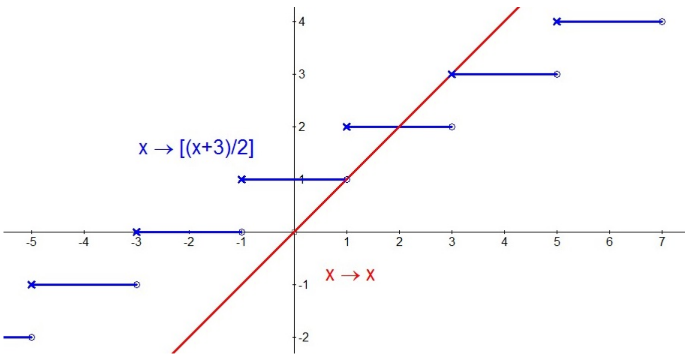
Also ist die Lösungsmenge: $L = [5,7[$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor$



(c) Graphische Lösung:

Wir zeichnen zum Graphen der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor$ aus (b) noch den Graphen der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ (der Graph entspricht der ersten Winkelhalbierenden).



Die Schnittstellen der beiden Graphen entsprechen den Lösungen der Gleichung. Man erkennt an der Graphik, dass: $L = \{2,3\}$

Rechnerische Lösung:

Da immer $\left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ ist, kann x nur dann eine Lösung der Gleichung sein, wenn $x \in \mathbb{Z}$ ist.

Ist $x \in \mathbb{Z}$, so sind die Zahlen, die auf x abgerundet werden, genau die Zahlen, die im Intervall $[x, x+1[$ liegen. Also:

$$\left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor = x \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{N} \ \underline{\text{und}} \quad x \leq \frac{x+3}{2} < x+1$$

Wegen

$$\begin{array}{lcccccccccc} & x & \leq & \frac{x+3}{2} & \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} & 2x & \leq & x+3 & \overset{-x}{\Leftrightarrow} & x & \leq & 3 \\ \text{und} & \frac{x+3}{2} & < & x+1 & \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} & x+3 & < & 2x+2 & \overset{-x-2}{\Leftrightarrow} & 1 & < & x \end{array}$$

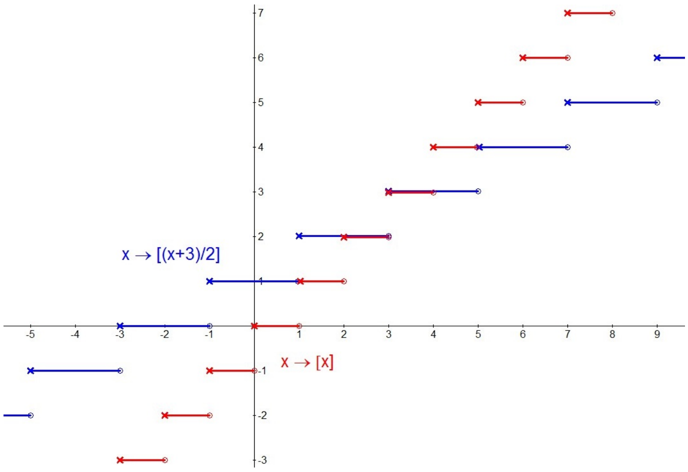
folgt:

$$\left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor = x \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{N} \ \underline{\text{und}} \quad 1 < x \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{2,3\}$$

Also: $L = \{2,3\}$

(d) Graphische Lösung:

Wir zeichnen zum Graphen der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lfloor \frac{x+3}{2} \rfloor$ aus (b) noch den Graphen der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lfloor x \rfloor$.



Die Schnittstellen der beiden Graphen entsprechen den Lösungen der Gleichung. Man erkennt an der Graphik, dass: $L = [2, 4[$

Rechnerische Lösung:

Wir bezeichnen $\underbrace{N = \lfloor x \rfloor}_{(1)}$. Damit ist $N \in \mathbb{Z}$.

Falls x die Gleichung löst ist auch $\underbrace{\lfloor \frac{x+3}{2} \rfloor = N}_{(2)}$.

Es gilt:

$$(1) \qquad N = \lfloor x \rfloor \quad \Leftrightarrow \quad N \leq x < N+1$$

$$(2) \qquad N = \left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor \quad \Leftrightarrow \quad N \leq \frac{x+3}{2} < N+1 \quad \overset{\cdot 2 \text{ und } -3}{\Leftrightarrow} \quad 2N-3 \leq x < 2N-1$$

Damit die Ungleichungen $2N - 3 \leq x$ und $x < N+1$ beide erfüllbar sind, muss gelten:

$$2N - 3 < N + 1 \quad \overset{-N+3}{\Leftrightarrow} \quad N < 4$$

Damit die Ungleichungen $N \leq x$ und $x < 2N - 1$ beide erfüllbar sind, muss gelten:

$$N < 2N - 1 \quad \overset{-N+1}{\Leftrightarrow} \quad 1 < N$$

Also kommen für N nur die Werte $N \in \{2, 3\}$ in Frage. Wir untersuchen nun für diese möglichen Werte von N nochmals die Ungleichungsketten, die wir aus (1) und (2) erhalten haben:

	Fall $N = 2$	Fall $N = 3$
(1)	$2 \leq x < 3$	$3 \leq x < 4$
(2)	$1 \leq x < 3$	$3 \leq x < 5$
(1) UND (2)	$2 \leq x < 3$	$3 \leq x < 4$

Insgesamt ergibt sich die Lösungsmenge: $L = [2, 4[$

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe MG1:

Bestimme alle sechsstelligen Zahlen der Form

$$aaabbb \quad \text{mit unbekannten Ziffern } a \in \{1, \ldots, 9\} \text{ und } b \in \{0, \ldots, 9\},$$

die durch 36 teilbar sind.

Tipp: Nutze eine Zerlegung von 36 als Produkt zweier geeigneter Zahlen.

Lösung:

Wir schreiben $aaabbb = N$.

Da $36 = 4 \cdot 9$ (und da 4 und 9 teilerfremd sind), ist N genau dann durch 36 teilbar, wenn N durch 4 und durch 9 teilbar ist.

Für die Teilbarkeit von N durch 4 beziehungsweise 9 nutzen wir die Teilbarkeitsregeln:

N ist genau dann durch 4 teilbar, wenn die aus den letzten beiden Ziffern von N gebildete Zahl bb durch 4 teilbar ist. Da $00,\ 44,\ 88$ durch 4 teilbar sind, $11,\ 22,\ 33,\ 55,\ 66,\ 77,\ 99$ jedoch nicht, kommt nur

$$b = 0 \quad \underline{\text{oder}} \quad b = 4 \quad \underline{\text{oder}} \quad b = 8$$

in Frage.

N ist genau dann durch 9 teilbar, wenn die Quersumme von N, also

$$Q(n) = a + a + a + b + b + b = 3a + 3b$$

durch 9 teilbar ist.

- Falls $b = 0$ ist $Q(n) = 3a$. Dies ist nur für $a = 3$ <u>oder</u> $a = 6$ <u>oder</u> $a = 9$ durch 9 teilbar.
- Falls $b = 4$ ist $Q(n) = 3a + 12$. Dies ist nur für $a = 2$ <u>oder</u> $a = 5$ <u>oder</u> $a = 8$ durch 9 teilbar.
- Falls $b = 8$ ist $Q(n) = 3a + 24$. Dies ist nur für $a = 1$ <u>oder</u> $a = 4$ <u>oder</u> $a = 7$ durch 9 teilbar.

Alle gesuchten Zahlen sind also:

$$333000\ ,\ 666000\ ,\ 999000\ ,\ 222444\ ,\ 555444\ ,\ 888444\ ,\ 111888\ ,\ 444888\ ,\ 777888$$

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe MG2:

Auf einer zweispurigen Autobahn herscht stockender Verkehr.

- Auf der rechten Spur fahren LKW.
  Jeder LKW hat eine Länge von 10 Metern, der Abstand zwischen zwei LKW beträgt 8 Meter.
- Auf der linken Spur fahren PKW.
  Jeder PKW hat eine Länge von 5 Metern, der Abstand zwischen zwei PKW beträgt 7 Meter.

Auf beiden Spuren wird jeweils eine konstante Geschwindigkeit gefahren, wobei die PKW etwas schneller sind. Der Fahrer eines PKW stellt fest, dass er pro Minute immer genau 4 LKW überholt.

(a) Von wie vielen PKW wird ein LKW pro Minute überholt?

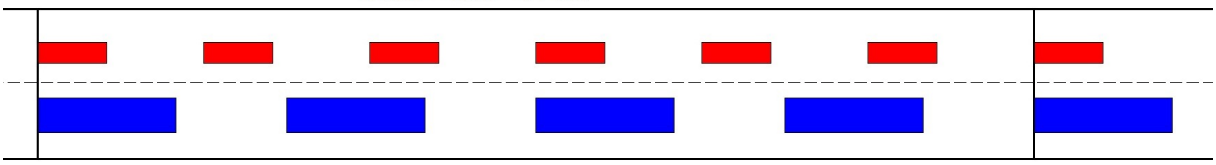
(b) Ein Motoradfahrer fährt zwischen den Spuren mit hoher Geschwindigkeit und überholt so pro Minute immer 12 PKW. Wie viele LKW überholt er pro Minute?

Lösung:

(a) Pro Minute fahren die PKW genau 4-LKW-Längen (einschließlich Abstand der LKW) weiter als die LKW.

Die beiden Spuren "verschieben" sich also pro Minute um $4 \cdot (10\text{m} + 8\text{m}) = 72\text{m}$.

Auf dieser Länge befinden sich $\frac{72\text{m}}{5\text{m}+7\text{m}} = 6$ PKW.



Also wird jeder LKW pro Minute von 6 PKW überholt.

(b) Der Motoradfahrer fährt pro Minute 12-PKW-Längen, also $12 \cdot (5\text{m} + 7\text{m}) = 144\text{m}$ weiter als die PKW und damit (siehe a)) $144\text{m} + 72\text{m} = 216\text{m}$ weiter als die LKW.

Auf dieser Länge befinden sich $\frac{216\text{m}}{(10\text{m}+8\text{m})} = 12$ LKW.

Der Motoradfahrer überholt also pro Minute 12 LKW.

Alternativlösung: Der Motoradfahrer überholt 12 PKW. Wären die LKW gleich schnell wie die PKW würde er damit

$$\frac{\text{PKW-Länge}}{\text{LKW-Länge}} \cdot 12 = \frac{5\text{m} + 7\text{m}}{10\text{m} + 8\text{m}} \cdot 12 = \frac{12}{18} \cdot 12 = 8$$

LKW überholen.

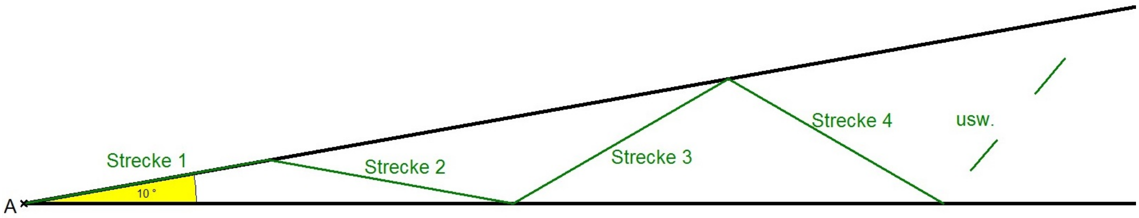
Da die PKW aber schneller als die LKW sind und zusätzlich 4 LKW pro Minute (siehe (a)) überholen, überholt der Motoradfahrer $8 + 4 = 12$ LKW.

Aufgabe MG3:

Gegeben seien zwei Halbgeraden, die im selben Punkt A beginnen und einen Winkel von $\alpha = 10°$ bilden.

Nun soll ein Streckenzug mit Strecken gleicher Länge gebildet werden, wobei die erste Strecke im Punkt A beginnt und auf einer der Halbgeraden liegt und jede weitere Strecke die beiden Halbgeraden miteinander verbindet.

(Die Strecken dürfen sich dabei nicht überschneiden oder übereinanderliegen.)



Aus wie vielen Strecken kann der Streckenzug maximal bestehen?

Lösung:

Wir benutzen die Bezeichungen $A_0, A_1, A_2, \ldots$ für die Endpunkte der einzelnen Strecken, wobei $A = A_0$ ist und die n-te Strecke die Endpunkte A_{n-1} und A_n hat.
(Also: die erste Strecke verläuft zwischen $A = A_0$ und A_1, die zweite Strecke verläuft zwischen A_1 und A_2, die dritte Strecke verläuft zwischen A_2 und A_3, usw.)

- Das Dreieck $\triangle A_0A_1A_2$ ist gleichschenklig. Daher gilt:

  $$\angle A_0A_2A_1 = \angle A_1A_0A_2 = \alpha = 10°$$

  Folglich ist (Winkelsumme im Dreieck):

  $$\angle A_2A_1A_0 = 180° - \angle A_0A_2A_1 - \angle A_1A_0A_2 = 180° - \alpha - \alpha = 180° - 2\alpha = 160°$$

  Damit ist (Nebenwinkel):

  $$\angle A_3A_1A_2 = 180° - \angle A_2A_1A_0 = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha = 20°$$

- Das Dreieck $\triangle A_1A_2A_3$ ist gleichschenklig. Daher gilt:

  $$\angle A_2A_3A_1 = \angle A_3A_1A_2 = 2\alpha = 20°$$

  Folglich ist (Winkelsumme im Dreieck):

  $$\angle A_1A_2A_3 = 180° - \angle A_2A_3A_1 - \angle A_3A_1A_2 = 180° - 2\alpha - 2\alpha = 180° - 4\alpha = 140°$$

  Damit ist (Winkel ergänzen sich zu 180°):

  $$\angle A_3A_2A_4 = 180° - \angle A_0A_2A_1 - \angle A_1A_2A_3 = 180° - \alpha - (180° - 2\alpha) = 3\alpha = 30°$$

- Das Dreieck $\triangle A_2A_3A_4$ ist gleichschenklig. Daher gilt:

  $$\angle A_2A_4A_3 = \angle A_3A_2A_4 = 3\alpha = 30°$$

  Folglich ist (Winkelsumme im Dreieck):

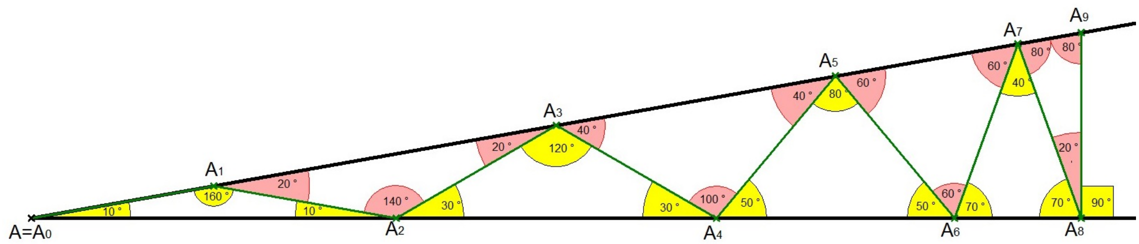
  $$\angle A_4A_3A_2 = 180° - \angle A_2A_4A_3 - \angle A_3A_2A_4 = 180° - 3\alpha - 3\alpha = 180° - 6\alpha = 120°$$

  Damit ist (Winkel ergänzen sich zu 180°):

  $$\angle A_5A_3A_4 = 180° - \angle A_2A_3A_1 - \angle A_4A_3A_2 = 180° - 2\alpha - (180° - 6\alpha) = 4\alpha = 40°$$

Durch Wiederholen dieser Argumentation folgt:

$\angle A_nA_{n-1}A_{n+1} = n\cdot\alpha = n\cdot 10°$ und $\angle A_{n-1}A_nA_{n+1} = 180° - 2n\cdot\alpha = 180° - n\cdot 20°$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots, n_{MAX}$



Falls A_{10} exisitiert, wäre demnach

$$\angle A_9A_8A_{10} = 9 \cdot 10° = 90° \quad \text{und} \quad \angle A_8A_9A_{10} = 180° - 9 \cdot 20° = 0°$$

Damit wäre $A_8 = A_{10}$ und die 10-te Strecke wäre identisch mit der 9-ten Strecke.

Also können nur die Punkte $A_0, \ldots, A_9$ existieren und somit kann der Streckenzug aus maximal 9 Strecken bestehen (siehe Graphik).

Aufgabe MG4:

Gegeben ist eine Raute $\square ABCD$, wir betrachten außerdem den Winkel $\alpha = \angle BAD$.

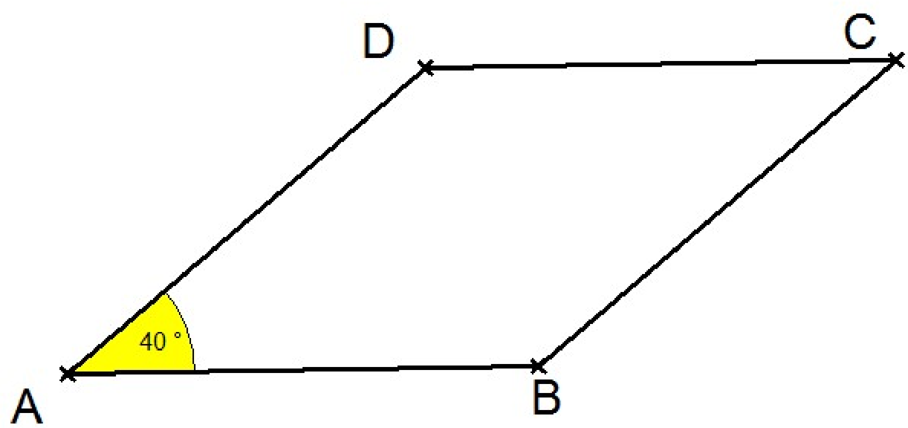
Gesucht ist die Menge M aller Punkte X im Inneren der Raute, für die gilt:

$$|\overline{XA}| > |\overline{XB}| > |\overline{XC}| > |\overline{XD}|$$

(Dabei bezeichnet $|\overline{PQ}|$ den Abstand zwischen zwei Punkten P und Q.)

(a) Im ersten Fall sei $\alpha = 40°$.

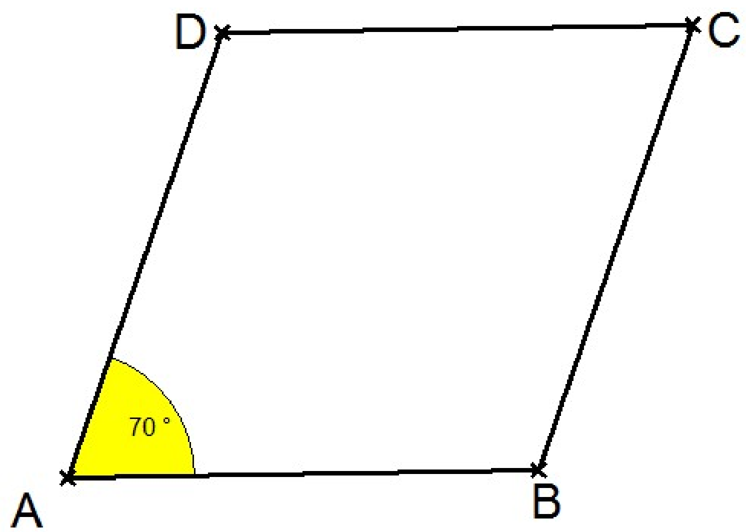
Zeichne M in die folgende Graphik ein:



Um was für eine Art von Figur handelt es sich bei M? (Nenne einen möglichst speziellen Begriff.)

(b) Im zweiten Fall sei $\alpha = 70°$.

Zeichne M in die folgende Graphik ein:



Um was für eine Art von Figur handelt es sich bei M? (Nenne einen möglichst speziellen Begriff.)

(c) Bekannt sei nun, dass $0° < \alpha < 90°$ gilt.

Bei welchen Werten von α ist M eine Figur wie in Fall 1?
Bei welchen Werten von α ist M eine Figur wie in Fall 2?

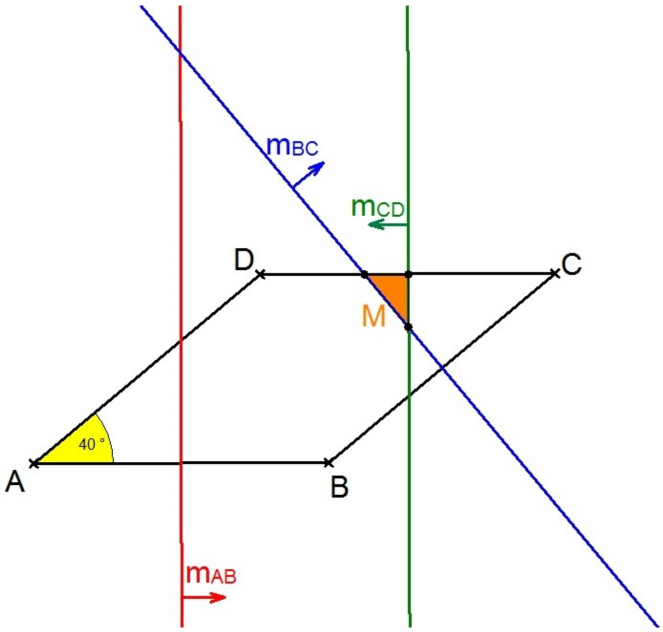
Begründe deine Antwort.

Lösung:

zu (a) und (b)

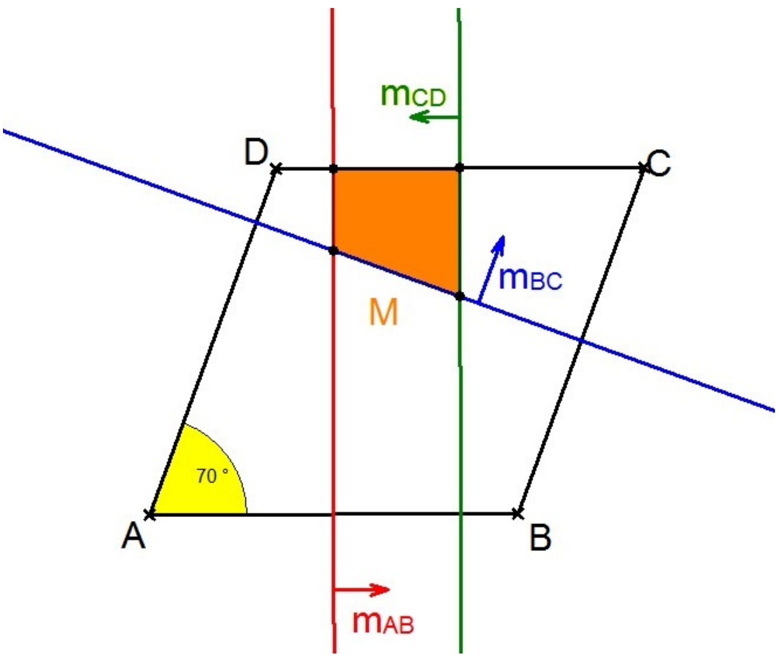
- Die Mittelsenkrechte m_{AB} zu den Punkten A und B zerlegt die Ebene in zwei Halbebenen. Wegen $|\overline{XA}| > |\overline{XB}|$ liegt M in der Halbebene, in der auch B liegt.
- Die Mittelsenkrechte m_{BC} zu den Punkten B und C zerlegt die Ebene in zwei Halbebenen. Wegen $|\overline{XB}| > |\overline{XC}|$ liegt M in der Halbebene, in der auch C liegt.
- Die Mittelsenkrechte m_{CD} zu den Punkten C und D zerlegt die Ebene in zwei Halbebenen. Wegen $|\overline{XC}| > |\overline{XD}|$ liegt M in der Halbebene, in der auch D liegt.

(a)



Es handelt sich bei M und ein rechtwinkliges Dreieck.

(b)



Es handelt sich bei M und ein Trapez.

(c) Wir bezeichnen:

- den Mittelpunkt von A und B mit M_{AB} und die Mittelsenkrechte zu A und B mit m_{AB}
- den Mittelpunkt von B und C mit M_{BC} und die Mittelsenkrechte zu B und C mit m_{BC}
- die Seitenlänge der Raute mit r

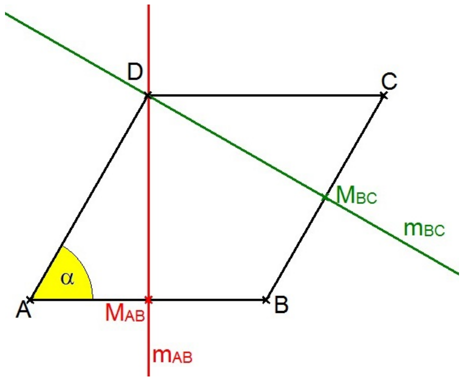
Der Grenzfall tritt bei dem Winkel α ein, bei dem m_{AB} durch D verläuft (Voraussetzung **(V)**).

In diesem Fall verläuft auch m_{BC} durch D

Begründung: Die Dreiecke $\triangle AM_{AB}D$ und $\triangle CM_{BC}D$ sind kongruent (SWS), denn

$$|\overline{AM_{AB}}| = \frac{r}{2} = |\overline{CM_{AC}}| \quad , \quad |\overline{AD}| = r = |\overline{CD}| \quad , \quad \alpha = \underbrace{\angle DAM_{AB} = \angle M_{BC}CD}_{\text{gegenüberliegende Winkel in einer Raute}}$$

Folglich ist auch $\angle DM_{BC}C = \angle AM_{AB}D \overset{(\mathbf{V})}{=} 90°$ und damit liegt D auf m_{BC}.



Wir zeichnen nun zusätzlich die Diagonale $\overline{BD}$ ein (siehe unten). Es gilt:

- $\triangle BDA$ ist gleichschenklig.

  Begründung: Die Dreiecke $\triangle AM_{AB}D$ und $\triangle BM_{AB}D$ sind kongruent nach SWS, denn:

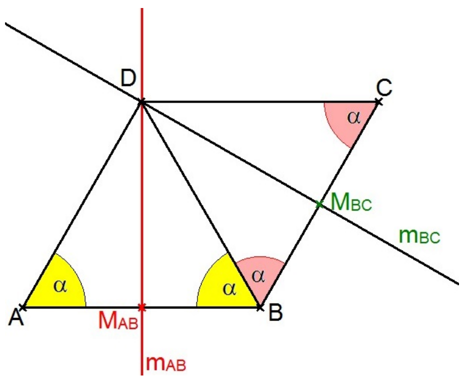
  $$|\overline{AM_{AB}}| = \frac{r}{2} = |\overline{BM_{AB}}| \quad , \quad \overline{M_{AB}D} \text{ ist gemeinsame Seite} \quad , \quad \angle AM_{AB}D = 90° = \angle DM_{AB}B$$

  Folglich ist auch $|\overline{AD}| = |\overline{BD}|$.

  Daraus folgt: $\angle DBA = \angle BAD = \alpha$

- Ebenso ist auch $\triangle CDB$ ist gleichschenklig. Daraus folgt: $\angle DBC = \angle BCD \overset{(*)}{=} \alpha$

  zu $(*)$: Gegenüberliegende Winkel in einer Raute sind gleich.



Nun folgt: $\angle ABC = \angle DBA + \angle DBC = 2\alpha$, abdererseits aber auch $\angle ABC = 180° - \alpha$, denn benachbarte Winkel in einer Raute ergänzen sich zu 180°.

$$\text{Gleichsetzen:} \quad 2\alpha = 180° - \alpha \quad \Rightarrow \quad 3\alpha = 180° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60°$$

Antwort: Für $\alpha \leq 60°$ ist M ein rechtwinkliges Dreieck (wie in (a)) und für $\alpha > 60°$ ist M ein Trapez (wie in (b)).

Aufgabe MS1:

In einer Quizshow beantworten alle Personen im Publikum zwei Fragen. Dabei stellt man fest:

- Genau 60 Personen beantworten beide Fragen richtig, genau 20 Personen beantworten beide Fragen falsch.
- Die erste Frage wurde 150-mal richtig beantwortet, die zweite Frage wurde 80-mal richtig beantwortet.

Wie viele Personen sitzen im Publikum?

Lösung:

Sei N die Zahl der Personen im Publikum.

- Aus dem ersten Hinweis folgt:
  Die Anzahl der richtigen Antworten (für beide Fragen zusammengenommen) beträgt:

$$60 \cdot 2 + 20 \cdot 0 + (N - 60 - 20) \cdot 1 = 120 + N - 80 = N + 40$$

- Aus dem zweiten Hinweis folgt:
  Die Anzahl der richtigen Antworten (für beide Fragen zusammengenommen) beträgt:

$$150 + 80 = 230$$

Gleichsetzen liefert:

$$n + 40 = 230 \quad \Rightarrow \quad N = 190$$

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe MS2:

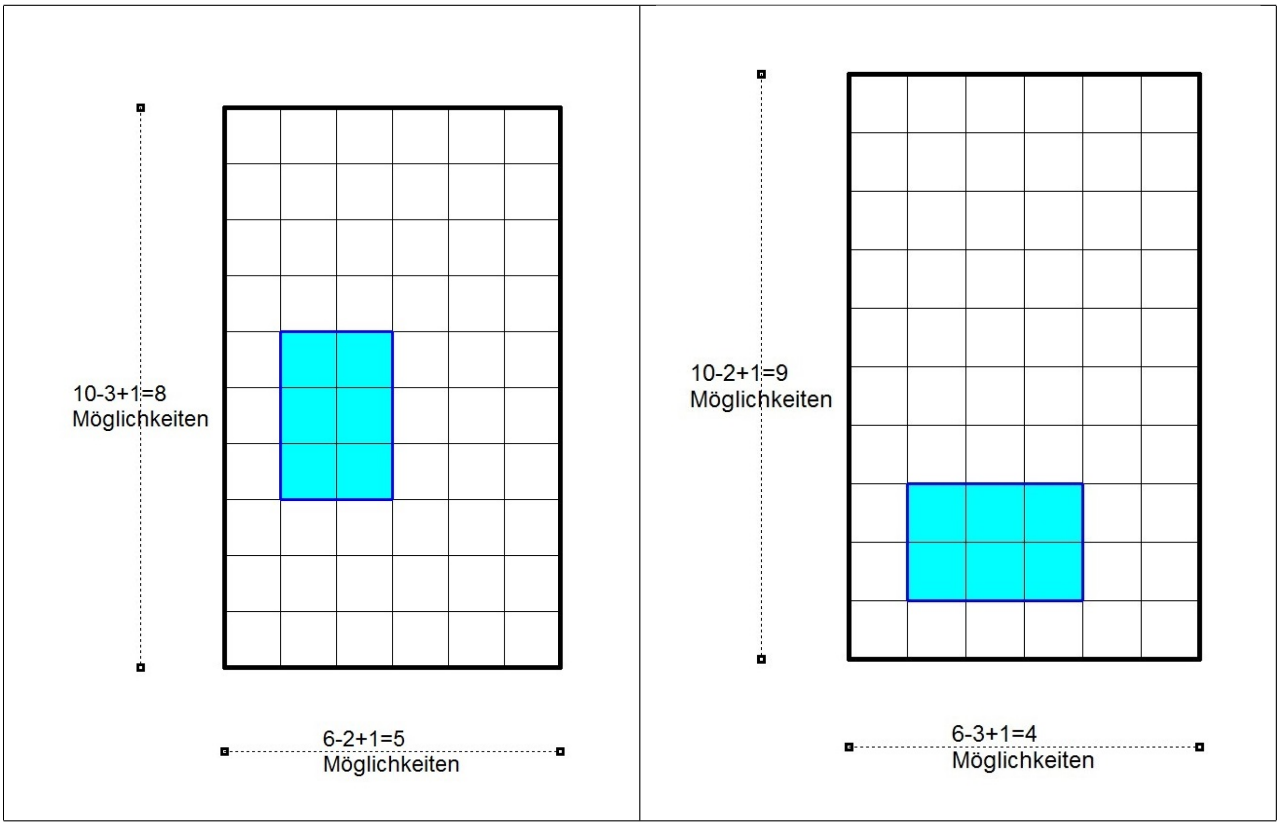
Ein rechteckiges Spielfeld ist in 6×10 quadratische Felder aufgeteilt.

Nun soll ein rechteckiger Spielstein der Größe 2×3 Felder, so auf das Spielbrett gelegt werden, dass er genau 6 Felder bedeckt.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese 6 Felder auszuwählen?

Lösung:

Es gibt zwei Möglichkeiten, den Richtung des Spielsteins zu wählen (siehe Graphik unten). Dadurch gibt es jeweils unterschiedliche Anzahlen für die Möglichkeiten, die vertikale und die horizontale Lage des Spielsteins zu wählen.



Insgesamt gibt es also

$$8 \cdot 5 + 9 \cdot 4 = 76$$

Möglichkeiten, die 6 Felder für den Spielstein auszuwählen

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe MS3:

Würde man bei einem Rechteck beide Seitenlängen um 1cm verkleinern, so würde der Flächeninhalt um 20cm^2 kleiner werden.

Um wieviel würde sich der Flächeninhalt erhöhen, wenn man stattdessen beide Seitenlängen um 1cm vergrößern würde?

Lösung 1:

Wir bezeichnen die Seitenlängen mit a und b.

Verkleinert man beide Seiten um 1cm, so verringert sich der Flächeninhalt um:

$$ab - (a - 1\text{cm})(b - 1\text{cm}) = ab - ab + (a + b)\text{cm} - 1\text{cm}^2 = (a + b)\text{cm} - 1\text{cm}^2$$

Es gilt also:

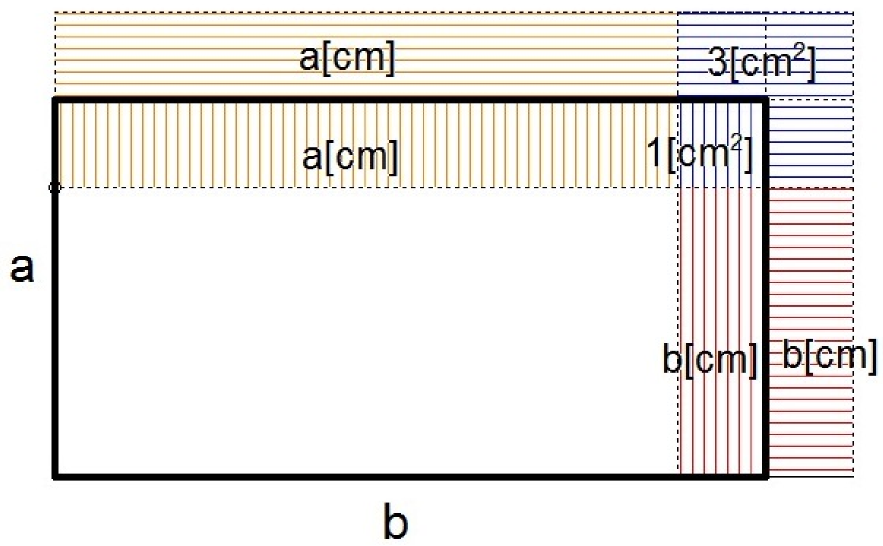
$$(a + b)\text{cm} - 1\text{cm}^2 = 20\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad (a + b)\text{cm} = 21\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad a + b = 21\text{cm}$$

Vergrößert man beide Seiten um 1cm, so erhöht sich der Flächeninhalt um:

$$(a + 1\text{cm})(b + 1\text{cm}) = ab + (a + b)\text{cm} + 1\text{cm}^2 - ab = \underbrace{(a + b)}_{=21\text{cm}}\text{cm} + 1\text{cm}^2 = 21\text{cm}^2 + 1\text{cm}^2 = 22\text{cm}^2$$

Lösung 2:

Wir bezeichnen die Seitenlängen mit a und b. An folgender Graphik erkennt man, dass der Unterschied zwischen dem vergrößerten Rechteck und dem Ausgangsrechteck um 2cm^2 größer ist als der Unterschied zwischen dem verkleinerten Rechteck und dem Ausgangsrechteck.



Also erhöht sich der Flächeninhalt um $20\text{cm}^2 + 2\text{cm}^2 = 22\text{cm}^2$.

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe MS4:

99 Piraten erbeuten einen Schatz. Da die Piraten eine strenge Rangfolge untereinander haben, wird der Schatz nach folgenden Regeln verteilt:

Der 1. Pirat erhält die Hälfte des Schatzes.
Der 2. Pirat erhält ein Drittel von dem, was übrigbleibt.
Der 3. Pirat erhält ein Viertel von dem, was übrigbleibt.
Der 4. Pirat erhält ein Fünftel von dem, was übrigbleibt.
und so weiter
und so weiter
Der 99. Pirat erhält ein Hundertstel von dem, was übrigbleibt.

Der verbleibende Rest wird für die Reparatur des Schiffs verwendet. Um welchen Anteil des gesamten Schatzes handelt es sich dabei?

Lösung:

Wir untersuchen, welcher Anteil des Schatzes noch übrig ist, nachdem sich die ersten n Piraten (mit $n \in \{1, \ldots, 99\}$) ihren Teil genommen haben:

Nach dem 1. Pirat ist noch der folgende Anteil übrig:	$\frac{1}{2}$	$=$	$\frac{1}{2}$
Nach dem 2. Pirat ist noch der folgende Anteil übrig:	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$	$=$	$\frac{1}{3}$
Nach dem 3. Pirat ist noch der folgende Anteil übrig:	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$	$=$	$\frac{1}{4}$
Nach dem 4. Pirat ist noch der folgende Anteil übrig:	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$	$=$	$\frac{1}{5}$
und so weiter			
Nach dem 99. Pirat ist noch der folgende Anteil übrig:	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100}$	$=$	$\frac{1}{100}$

Es wird also genau $\frac{1}{100}$ des gesamten Schatzes für die Reparatur des Schiffes verwendet.

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe MS5:

(a) Gegeben sind 8 Spielwürfel mit den Augenzahlen $1, \ldots, 6$, wobei immer die 1 der 6, die 2 der 5 und die 3 der 4 gegenüberliegt.

Diese werden zu einem großen $2 \times 2 \times 2$- Würfel zusammengebaut.

Welchen Wert kann die Summe aller Augenzahlen auf der Außenfläche des großen Würfels (auch Ober- und Unterseite) maximal haben?

(b) Nun werden 27 solcher Spielwürfel zu einem großen $3 \times 3 \times 3$- Würfel zusammengebaut.

Welchen Wert kann die Summe aller Augenzahlen auf der Außenfläche des großen Würfels (auch Ober- und Unterseite) maximal haben?

Lösung:

(a) Jeder der 8 Spielwürfel kann so gedreht werden, dass die Augenzahlen $4, 5$ und 6 nach außen zeigen. Daher beträgt die maximale Augensumme auf allen Außenseiten zusammen:

$$8 \cdot (4 + 5 + 6) = 120$$

(b) Die 8 Spielwürfel in den Ecken können so gedreht werden, dass die Augenzahlen $4, 5$ und 6 nach außen zeigen.

Die 12 Spielwürfel an den Kanten können so gedreht werden, dass die Augenzahlen 5 und 6 nach außen zeigen.

Die 6 Spielwürfel in der Mitte der Seitenflächen können so gedreht werden, dass die Augenzahl 6 nach außen zeigt.

(Der Spielwürfel in der Mitte spielt natürlich keine Rolle für die Augensumme auf der Außenseite.)

Insgesamt beträgt die maximale Augensumme auf allen Außenseiten zusammen:

$$8 \cdot (4 + 5 + 6) + 12 \cdot (5 + 6) + 6 \cdot 6 = 120 + 132 + 36 = 288$$

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe MS6:

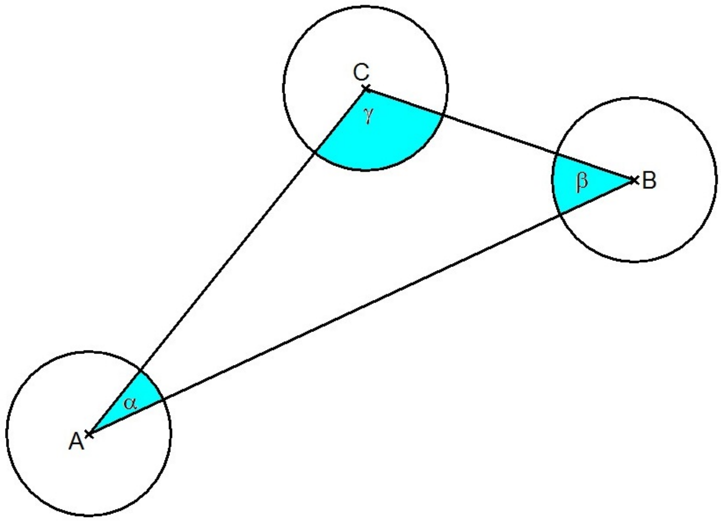
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck sowie drei überschneidungsfreie Kreise um die Eckpunkte des Dreiecks mit gleichem Radius.

Sei F die Gesamtfläche aller drei Kreise.

Welcher Anteil von F liegt im Inneren des Dreiecks?

Lösung 1:

Der Radius der Kreise sei r. Wir nutzen außerdem die Bezeichnungen in folgender Skizze:



Die gesamte Flächeninhalt aller drei Kreise beträgt $3 \cdot \pi r^2$.

Die Summe der Flächeninhalte der drei Kreissektoren im Inneren des Dreiecks beträgt:

$$\frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 + \frac{\beta}{360°} \cdot \pi r^2 \frac{\gamma}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2$$

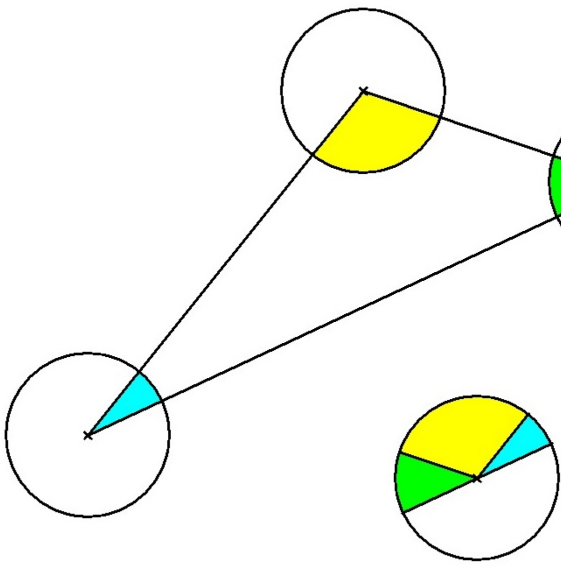
Man beachte, dass die Winkelsumme im Dreieck immer 180° beträgt.

Also ist der Anteil von F, der im Inneren des Dreiecks liegt:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \pi r^2}{3\pi r^2} = \frac{1}{6}$$

Lösung 2:

Man kann die drei Kreissektoren im Inneren des Dreiecks zu einem Halbkreis zusammensetzen (Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°).



Also ist der Anteil von F, der im Inneren des Dreiecks liegt:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \text{Kreisfläche}}{3 \cdot \text{Kreisfläche}} = \frac{1}{6}$$

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe MS7:

Eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ hat Rest 16 bei Division durch 21.

(a) Welchen Rest hat a bei Division durch 7?

(b) Welchen Rest kann a bei Division durch 63 haben? (Geben Sie alle Möglichkeiten an.)

(c) Welchen Rest kann a bei Division durch 9 haben? (Geben Sie alle Möglichkeiten an.)

Lösung:

(a) Da a Rest 16 bei Division durch 21 hat, gilt $a = q \cdot 21 + 16$ mit einer geeigneten Zahl $q \in \mathbb{N}_0$.

Es folgt:

$$a = q \cdot 21 + 16 = q \cdot 3 \cdot 7 + 2 \cdot 7 + 2 = \underbrace{(3q + 2)}_{\in \mathbb{N}_0} \cdot 7 + \underbrace{2}_{<7}$$

Also hat a Rest 2 bei Division durch 7.

(b) Da a Rest 16 bei Division durch 21 hat, gilt: $a = q \cdot 21 + 16$ mit einer geeigneten Zahl $q \in \mathbb{N}_0$.

Da man q auch mit Rest durch 3 teilen kann, gibt es eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ und einen Rest $r \in \{0, 1, 2\}$ mit $q = p \cdot 3 + r$.

Setzt man dies oben ein, so erhält man:

$$a = q \cdot 21 + 16 = a = (p \cdot 3 + r) \cdot 21 + 16 = \underbrace{p \cdot 63}_{\in \mathbb{N}_0} + \underbrace{(21r + 16)}_{<63}$$

Der Rest bei Division von a durch 63 ist also $21r + 16$ und ergibt:

$$\begin{aligned} \text{Falls } r = 0 \quad &\Rightarrow \quad 21r + 16 = 16 \\ \text{Falls } r = 1 \quad &\Rightarrow \quad 21r + 16 = 37 \\ \text{Falls } r = 2 \quad &\Rightarrow \quad 21r + 16 = 58 \end{aligned}$$

Also kann a bei Division durch 63 einen der Reste $16, 37$ oder 58 haben.

(c) Wir betrachten alle Möglichkeiten für den Rest von a bei Division durch 63 (siehe (b)).

- Hat a Rest 16 bei Division durch 63, gilt $a = q \cdot 63 + 16$ mit einer geeigneten Zahl $q \in \mathbb{N}_0$.

  Es folgt:

  $$a = q \cdot 63 + 16 = q \cdot 7 \cdot 9 + 1 \cdot 9 + 7 = \underbrace{(7q + 1)}_{\in \mathbb{N}_0} \cdot 9 + \underbrace{7}_{<9}$$

  Also hat a Rest 7 bei Division durch 9.

- Hat a in diesem Fall Rest 37 bei Division durch 63, gilt $a = q \cdot 63 + 37$ mit einer geeigneten Zahl $q \in \mathbb{N}_0$.

  Es folgt:

  $$a = q \cdot 63 + 37 = q \cdot 7 \cdot 9 + 4 \cdot 9 + 1 = \underbrace{(7q + 4)}_{\in \mathbb{N}_0} \cdot 9 + \underbrace{1}_{<9}$$

  Also hat a in diesem Fall Rest 1 bei Division durch 9.

- Hat a Rest 58 bei Division durch 63, gilt $a = q \cdot 63 + 58$ mit einer geeigneten Zahl $q \in \mathbb{N}_0$.

  Es folgt:

  $$a = q \cdot 63 + 58 = q \cdot 7 \cdot 9 + 6 \cdot 9 + 4 = \underbrace{(7q + 6)}_{\in \mathbb{N}_0} \cdot 9 + \underbrace{4}_{<9}$$

  Also hat a in diesem Fall Rest 4 bei Division durch 9.

Also kann a bei Division durch 9 einen der Reste $1, 4$ oder 7 haben.

TAG DER MATHEMATIK 2017

Aufgabe MS8:

Arne und Barbara schwimmen Bahnen auf einer 50-Meter-Bahn im Freibad. Sie starten gleichzeitig an gegenüberliegenden Seiten (Startseite A für Arne und B für Barbara). Beide schwimmen mit konstanter Geschwindigkeit, sind aber unterschiedlich schnell.

Zum ersten Mal begegnen Sie sich 23 Meter von Seite B entfernt.

(a) An welcher Stelle begegnen Sie sich zum zweiten Mal?

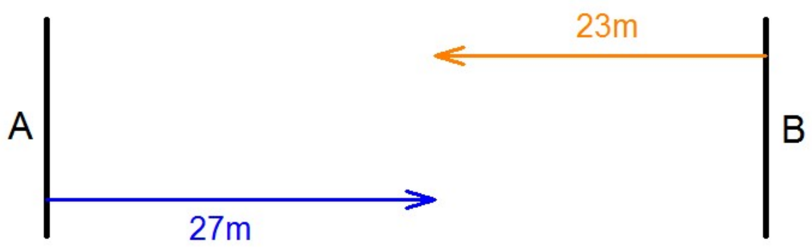
(b) An welcher Stelle begegnen Sie sich zum dritten Mal?

(c) An welcher Stelle überholt Arne Barbara zum ersten Mal?

(Geben Sie jeweils die Entfernung zu Seite A oder zu Seite B an.)

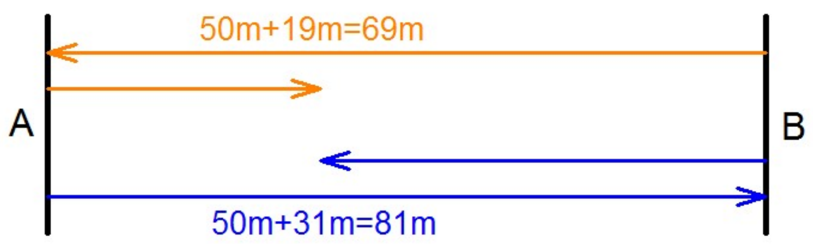
Lösung:

Bei der ersten Begegnung haben beide zusammen eine komplette Bahn (50m=27m+23m) zurückgelegt.



(a) Sie begegnen sich zum zweiten Mal, wenn sie zusammen genau 3 Bahnen zurückgelegt haben, denn dann hat jeder der beiden eine komplette Bahn zurückgelegt und zusammen haben sie noch eine weitere Bahn zurückgelegt.

- Arne hat dann $3 \cdot 27\text{m} = 81\text{m} = 50\text{m} + 31\text{m}$ zurückgelegt.
- Barbara hat dann $3 \cdot 23\text{m} = 69\text{m} = 50\text{m} + 19\text{m}$ zurückgelegt.



Sie begegnen sich zum zweiten Mal also 19 Meter von Ende A (bzw. 31 Meter von Ende B) entfernt.

(b) Sie begegnen sich zum dritten Mal, wenn sie zusammen genau 5 Bahnen zurückgelegt haben, denn dann hat jeder der beiden genau 2 Bahnen zurückgelegt und zusammen haben sie noch eine weitere Bahn zurückgelegt.

- Arne hat dann $5 \cdot 27\text{m} = 135\text{m} = 2 \cdot 50\text{m} + 35\text{m}$ zurückgelegt.
- Barbara hat dann $5 \cdot 23\text{m} = 115\text{m} = 2 \cdot 50\text{m} + 15\text{m}$ zurückgelegt.

Sie begegnen sich zum dritten Mal also 15 Meter von Ende B (bzw. 35 Meter von Ende A) entfernt.

(c) Sei x die Strecke die Arne geschwommen ist, wenn er Barbara zum ersten Mal überholt.

Dann muss er genau eine Bahn, also 50m mehr als Barbara geschwommen sein. Barbara ist zu dem Zeitpunkt also die Strecke $x - 50\text{m}$ geschwommen.

Außerdem wissen wir, dass Barbaras Geschwindigkeit $\frac{23\text{m}}{27\text{m}} = \frac{23}{27}$ der Geschwindigkeit von Arne beträgt. Damit folgt, dass Barbara zum Zeitpunkt des Überholens die Strecke $\frac{23}{27} \cdot x$ geschwommen ist.

Gleichsetzen:

$$x - 50\text{m} = \frac{23}{27} \cdot x \quad \overset{-\frac{23}{27}\cdot x + 50\text{m}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{4}{27} \cdot x = 50\text{m} \quad \overset{\cdot\frac{27}{4}}{\Leftrightarrow} \quad x = \frac{27}{4} \cdot 50\text{m} \quad \overset{\cdot\frac{27}{4}}{\Leftrightarrow} \quad x = 6 \cdot 50\text{m} + \frac{1}{4} \cdot 50\text{m}$$

Arne ist also 6 Bahnen und eine Viertelbahn (entspricht $12,5$m) geschwommen (Barbara nur 5 Bahnen und eine Viertelbahn).

Arne überholt Barbara also $12,5$ Meter vom Ende von Seite A (bzw. $37,5$ Meter vom Ende von Seite B) entfernt.