Institut für MATHEMATIK

Aufgaben für die Klassenstufen 9/10

mit Lösungen

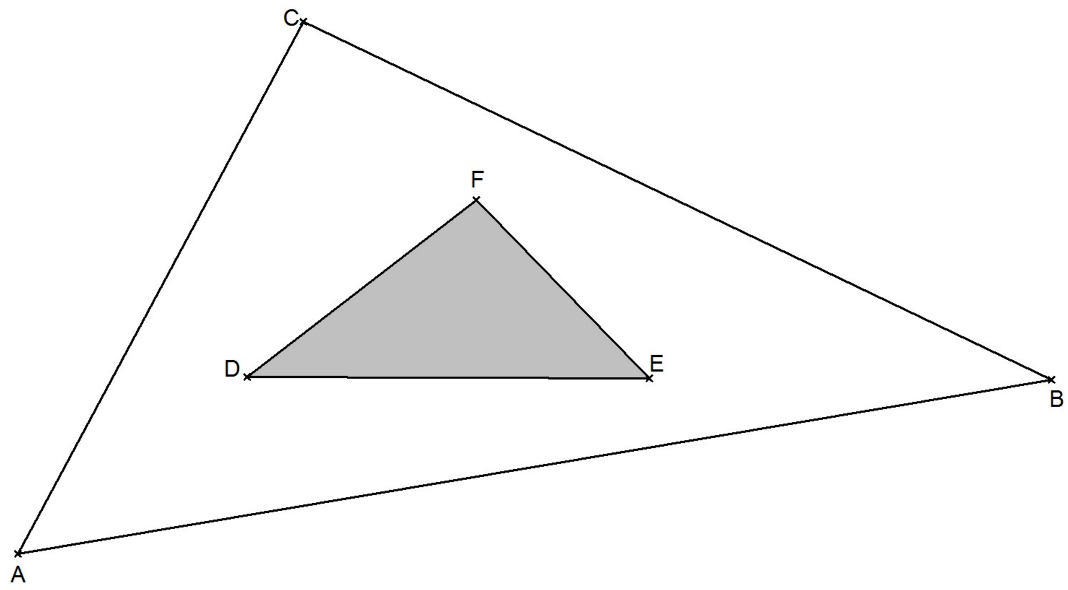
Einzelwettbewerb	Aufgaben ME1, ME2, ME3
Gruppenwettbewerb	Aufgaben MG1, MG2, MG3, MG4
Speedwettbewerb	Aufgaben MS1, MS2, MS3, MS4, MS5, MS6, MS7, MS8

TAG DER MATHEMATIK 2018

Aufgabe ME1:

Gegeben seien zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$, wobei $\triangle DEF$ im Inneren von $\triangle ABC$ liegt. Dabei gilt:

- D ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AF}$.
- E ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BD}$.
- F ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CE}$.

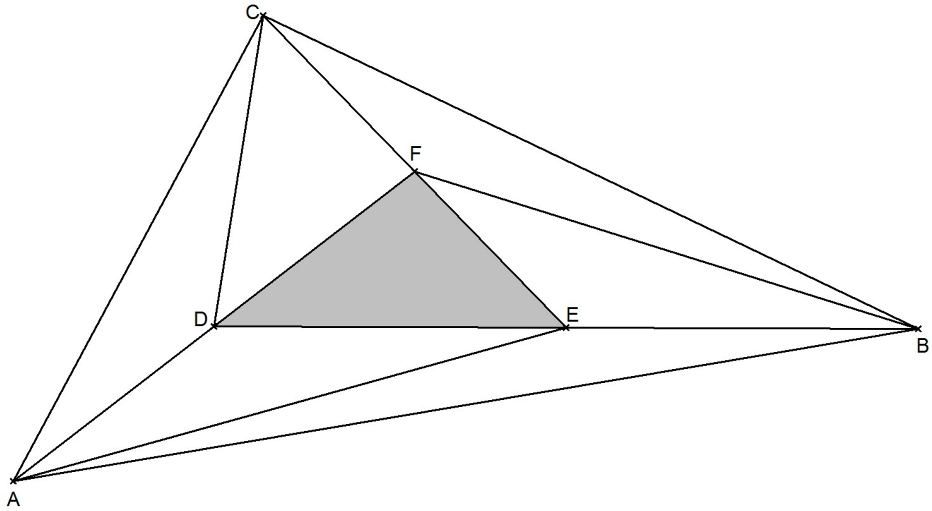


Wie groß ist der Anteil der Fläche von $\triangle DEF$ an der Gesamtfläche von $\triangle ABC$?
Begründe deine Antwort.

Tipp: Zerlege das große Dreieck in flächengleiche (nicht kongruente) Dreiecke.

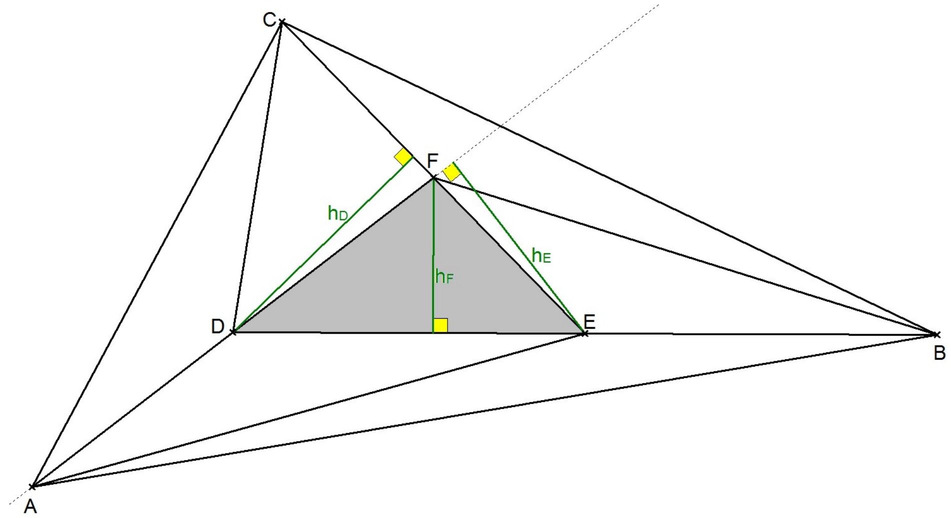
Lösung ME1:

Wir zerlegen $\triangle ABC$ wie abgebildet in 7 Teildreiecke.



Wir begründen nun, dass jedes dieser 7 Teildreiecke denselben Flächeninhalt wie $\triangle DEF$ hat.

1.) Wir betrachten die Höhen h_D, h_E und h_F im Dreieck $\triangle DEF$:



Dann gilt:

- h_D ist auch Höhe im Dreieck $\triangle CDF$. Also:

$$\left\{\begin{array}{lcl} F(\triangle DEF) & = & \frac{1}{2}\cdot h_D\cdot|\overline{EF}| \\ F(\triangle CDF) & = & \frac{1}{2}\cdot h_D\cdot|\overline{CF}| \end{array}\right\} \overset{|\overline{EF}|=|\overline{CF}|}{\Longrightarrow} F(\triangle DEF) = F(\triangle CDF)$$

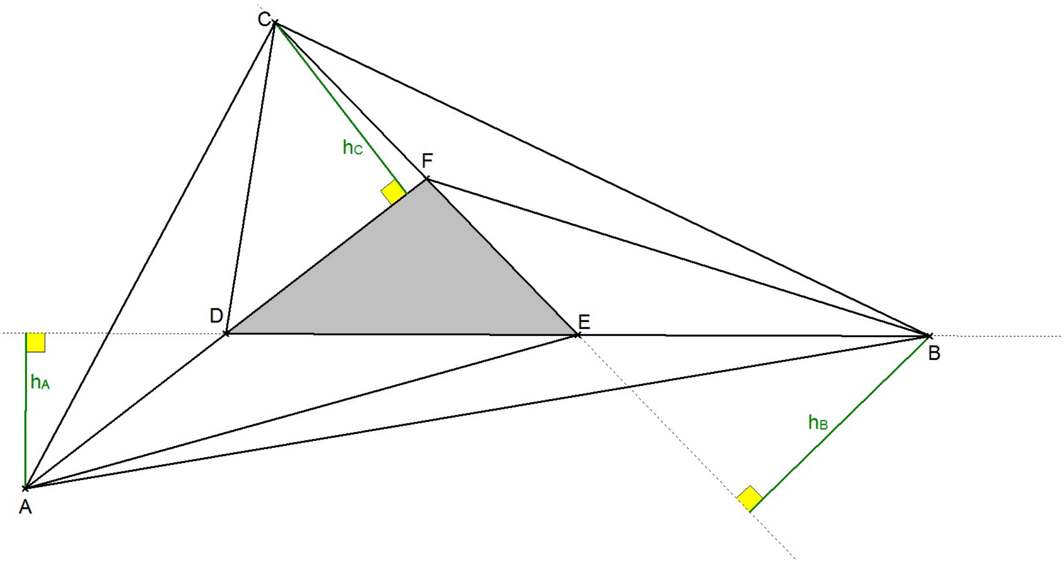
- h_E ist auch Höhe im Dreieck $\triangle AED$. Also:

$$\left\{\begin{array}{lcl} F(\triangle DEF) & = & \frac{1}{2}\cdot h_E\cdot|\overline{FD}| \\ F(\triangle AED) & = & \frac{1}{2}\cdot h_E\cdot|\overline{AD}| \end{array}\right\} \overset{|\overline{FD}|=|\overline{AD}|}{\Longrightarrow} F(\triangle DEF) = F(\triangle AED)$$

- h_F ist auch Höhe im Dreieck $\triangle BFE$. Also:

$$\left\{\begin{array}{lcl} F(\triangle DEF) & = & \frac{1}{2}\cdot h_F\cdot|\overline{DE}| \\ F(\triangle BFE) & = & \frac{1}{2}\cdot h_F\cdot|\overline{BE}| \end{array}\right\} \overset{|\overline{DE}|=|\overline{BE}|}{\Longrightarrow} F(\triangle DEF) = F(\triangle BFE)$$

2.) Wir betrachten die Höhen h_A, h_B und h_C in den Dreiecken $\triangle AED$, $\triangle BFE$ und $\triangle CDF$:



Dann gilt:

- h_A ist auch Höhe im Dreieck $\triangle EAB$. Also:

$$\left.\begin{cases} F(\triangle AED) = \frac{1}{2} \cdot h_A \cdot |\overline{ED}| \\ F(\triangle EAB) = \frac{1}{2} \cdot h_A \cdot |\overline{BE}| \end{cases}\right\} \overset{|\overline{ED}|=|\overline{BE}|}{\Longrightarrow} \quad F(\triangle EAB) = F(\triangle AED) \overset{\text{(siehe oben)}}{=} F(\triangle DEF)$$

- h_B ist auch Höhe im Dreieck $\triangle BCF$. Also:

$$\left.\begin{cases} F(\triangle BFE) = \frac{1}{2} \cdot h_B \cdot |\overline{FE}| \\ F(\triangle BCF) = \frac{1}{2} \cdot h_B \cdot |\overline{CF}| \end{cases}\right\} \overset{|\overline{FE}|=|\overline{CF}|}{\Longrightarrow} \quad F(\triangle BCF) = F(\triangle BFE) \overset{\text{(siehe oben)}}{=} F(\triangle DEF)$$

- h_C ist auch Höhe im Dreieck $\triangle FCA$. Also:

$$\left.\begin{cases} F(\triangle CDF) = \frac{1}{2} \cdot h_C \cdot |\overline{DF}| \\ F(\triangle FCA) = \frac{1}{2} \cdot h_C \cdot |\overline{AD}| \end{cases}\right\} \overset{|\overline{DF}|=|\overline{AD}|}{\Longrightarrow} \quad F(\triangle FCA) = F(\triangle CDF) \overset{\text{(siehe oben)}}{=} F(\triangle DEF)$$

Also ist gezeigt, dass $\triangle ABC$ in 7 Teildreiecke mit gleichem Flächeninhalt zerlegt werden kann, wobei eines davon $\triangle DEF$ ist.

Damit: $\quad F(\triangle DEF) = \frac{1}{7} \cdot F(\triangle ABC)$

TAG DER MATHEMATIK 2018

Aufgabe ME2:

Für einen Quader mit den Kantenlängen a, b und c gilt:

Verdoppelt man a, verringert dafür aber b um 1cm und c um 2cm, so erhält man einen Quader mit gleichem Volumen, gleicher Oberfläche und gleicher (Gesamt-)Kantenlänge.

Bestimme a, b und c.

Achtung: Die Aufgabenstellung ist nicht eindeutig. Finden Sie alle möglichen Lösungen.

Lösung ME2:

Wir betrachten auch den veränderten Quader mit den Kantenlängen:

$$\tilde{a} = 2a \quad , \quad \tilde{b} = b - 1[\text{cm}] \quad , \quad \tilde{c} = c - 2[\text{cm}]$$

Dann gilt:

	Ausgangsquader	veränderter Quader
Kantenlänge	$4 \cdot (a + b + c)$	$4 \cdot (2a + (b - 1[\text{cm}]) + (c - 2[\text{cm}]))$
Oberfläche	$2 \cdot (ab + ac + bc)$	$2 \cdot (2a(b - 1[\text{cm}]) + 2a(c - 2[\text{cm}]) + (b - 1[\text{cm}])(c - 2[\text{cm}]))$
Volumen	abc	$2a(b - 1[\text{cm}])(c - 2[\text{cm}])$

Nach Voraussetzungen gilt:

1.) Gleichheit der Kantenlängen:

$$4 \cdot (a+b+c) = 4 \cdot (2a+(b-1[\text{cm}])+(c-2[\text{cm}])) \quad \Leftrightarrow \quad a+b+c = 2a+b+c-3[\text{cm}] \quad \Leftrightarrow \quad a = 3[\text{cm}] \quad \text{(I)}$$

2.) Gleichheit der Oberflächen:

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot (ab + ac + bc) = 2 \cdot (2a(b - 1[\text{cm}]) + 2a(c - 2[\text{cm}]) + (b - 1[\text{cm}])(c - 2[\text{cm}])) \\
\Leftrightarrow \quad & ab + ac + bc = 2ab - 2a[\text{cm}] + 2ac - 4a[\text{cm}] + bc - 2b[\text{cm}] - c[\text{cm}] + 2[\text{cm}]^2 \\
\overset{\text{(I)}}{\Leftrightarrow} \quad & 3b[\text{cm}] + 3c[\text{cm}] + bc = 6b[\text{cm}] - 6[\text{cm}]^2 + 6c[\text{cm}] - 12[\text{cm}]^2 + bc - 2b[\text{cm}] - c[\text{cm}] + 2[\text{cm}]^2 \\
\Leftrightarrow \quad & b + 2c = 16[\text{cm}] \\
\Leftrightarrow \quad & b = -2c + 16[\text{cm}] \quad \text{(II)}
\end{aligned}$$

3.) Gleichheit der Volumina:

$$\begin{aligned}
abc = 2a(b - 1[\text{cm}])(c - 2[\text{cm}]) \quad \Leftrightarrow \quad & bc = 2(b - 1[\text{cm}])(c - 2[\text{cm}]) \\
\overset{\text{(II)}}{\Leftrightarrow} \quad & (-2c + 16[\text{cm}]) \cdot c = 2(-2c + 15[\text{cm}])(c - 2[\text{cm}]) \\
\Leftrightarrow \quad & -2c^2 + 16c[\text{cm}] = -4c^2 + 8c[\text{cm}] + 30c[\text{cm}] - 60[\text{cm}]^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 2c^2 - 22c[\text{cm}] + 60[\text{cm}]^2 = 0[\text{cm}]^2 \\
\Leftrightarrow \quad & c^2 - 11c[\text{cm}] + 30[\text{cm}]^2 = 0[\text{cm}]^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (c - 5[\text{cm}]) \cdot (c - 6[\text{cm}]) = 0[\text{cm}]^2 \\
\Leftrightarrow \quad & c = 5[\text{cm}] \quad \underline{\text{oder}} \quad c = 6[\text{cm}]
\end{aligned}$$

Es gibt also folgende Lösungen:

<u>Lösung 1:</u> Für $c = 5[\text{cm}]$ ergibt sich aus (2): $b = -2 \cdot 5[\text{cm}] + 16[\text{cm}] = 6[\text{cm}]$

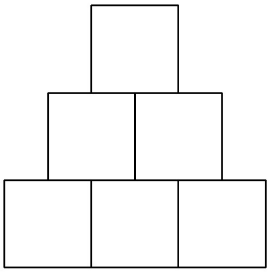
Also: $a = 3[\text{cm}]$, $b = 6[\text{cm}]$, $c = 5[\text{cm}]$

<u>Lösung 2:</u> Für $c = 6[\text{cm}]$ ergibt sich aus (2): $b = -2 \cdot 6[\text{cm}] + 16[\text{cm}] = 4[\text{cm}]$

Also: $a = 3[\text{cm}]$, $b = 4[\text{cm}]$, $c = 6[\text{cm}]$

Aufgabe ME3:

Knut hat Bausteine in den 4 Farben rot, gelb, grün und blau. (Von jeder Farbe sind ausreichend viele Bausteine vorhanden.) Er möchte daraus einen folgenden Turm mit folgender Struktur bauen:



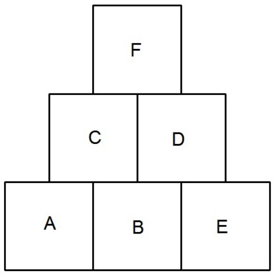
Dabei sollen niemals zwei Bausteine gleicher Farbe aneinander angrenzen.

(a) Wieviele Möglichkeiten hat Knut, den Turm zu bauen?

(b) Bei wievielen dieser Möglichkeiten werden tatsächlich alle vier Farben (mindestens einmal) verwendet?

Lösung ME3:

(a) Wir bezeichnen die Positionen der einzelnen Bausteine wie folgt:



Nun gibt es:

- 4 Möglichkeiten, die Farbe des Bausteins an der Stelle A zu wählen,
- (unabhängig davon) 3 Möglichkeiten, die Farbe für den Baustein an der Stelle B zu wählen,

  (Die Farbe des Bausteins auf Position A kann nicht gewählt werden.)
- (unabhängig davon) 2 Möglichkeiten, die Farbe des Bausteins an der Stelle C auszuwählen,

  (Die Farben der Bausteine auf den Positionen A und B können nicht gewählt werden, diese Farben müssen verschieden sein, da A und B benachbart sind.)
- (unabhängig davon) 2 Möglichkeiten, die Farbe des Bausteins an der Stelle D auszuwählen,

  (Die Farben der Bausteine auf den Positionen B und C können nicht gewählt werden, diese Farben müssen verschieden sein, da B und C benachbart sind.)
- (unabhängig davon) 2 Möglichkeiten, die Farbe des Bausteins an der Stelle E auszuwählen,

  (Die Farben der Bausteine auf den Positionen B und D können nicht gewählt werden, diese Farben müssen verschieden sein, da B und D benachbart sind.)
- (unabhängig davon) 2 Möglichkeiten, die Farbe des Bausteins an der Stelle F auszuwählen,

  (Die Farben der Bausteine auf den Positionen C und D können nicht gewählt werden, diese Farben müssen verschieden sein, da C und D benachbart sind.)

Also gibt es insgesamt

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 192$$

Möglichkeiten, den Turm zu bauen.

(b) Wir überlegen uns zunächst, wieviele Möglichkeiten es gibt, wenn man nur 3 der 4 Farben verwendet.

Zunächst hat man 4 Möglichkeiten, die Farbe auszuwählen, die man nicht benutzt.

(Zu beachten ist dabei, dass es offenbar nicht möglich ist, 2 Farben wegzulassen.)

Dann stehen die 3 Farben verwendeten Farben fest und es gibt analog zu (a)

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6$$

Möglichkeiten, den Turm zu bauen.

Insgesamt hat man also $4 \cdot 6 = 24$ Möglichkeiten, wenn man nur 3 Farben verwendet.

Die Anzahl der Möglichkeiten, den Turm zu bauen, wenn man tatsächlich alle 4 Farben verwendet, beträgt somit: $192 - 24 = 168$

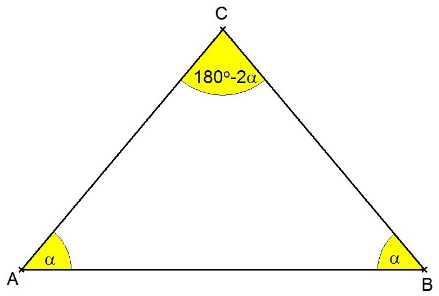
Aufgabe MG1:

In einem gleichschenkligen Dreieck gibt es eine Winkelhalbierende, die das Dreieck in zwei Teildreiecke zerlegt, von denen mindestens eines ebenfalls gleichschenklig ist.

Bestimme alle Möglichkeiten für die Maße der Innenwinkel des Ausgangsdreiecks.

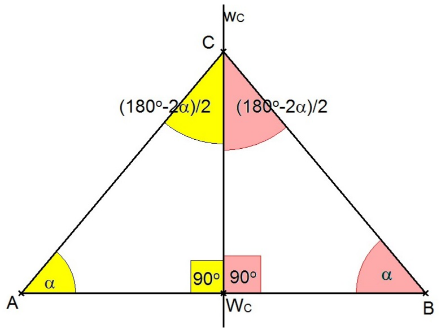
Lösung MG1:

Wir bezeichnen das Ausgangsdreieck mit $\triangle ABC$ und gehen davon aus, dass die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ gleich lang sind. Ist $\alpha := \measuredangle BAC$, so gilt damit auch $\measuredangle CBA = \alpha$ und folglich (Winkelsumme im Dreieck) $\measuredangle ACB = 180° - 2\alpha$.



1. Fall: Wir betrachten die Winkelhalbierende w_C im Punkt C und ihren Schnittpunkt W_C mit der Strecke $\overline{AB}$. Da $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$ gilt, schneidet w_C die Strecke $\overline{AB}$ rechtwinklig.

Außerdem gilt $\measuredangle ACW_C = \measuredangle W_CCB = \frac{\measuredangle ACB}{2} = \frac{180°-2\alpha}{2}$.



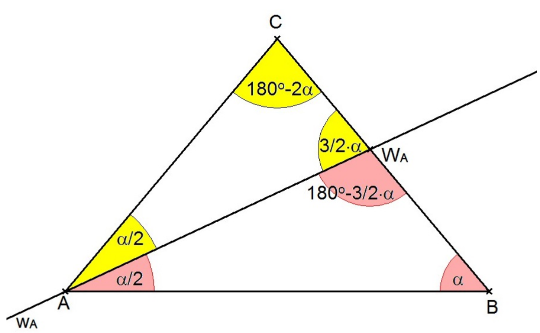
Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn es zwei gleiche Winkel hat. Wegen der Symmetrie ist $\triangle AW_CC$ genau dann gleichschenklig, wenn $\triangle W_CBC$ gleichschenklig ist. Da kein Dreieck zwei rechte Winkel haben kann, ist dies genau dann der Fall, wenn:

$$\alpha = \frac{180° - 2\alpha}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha = 180° - 2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 4\alpha = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 45°$$

2. Fall: Wir betrachten die Winkelhalbierende w_A im Punkt A und ihren Schnittpunkt W_A mit der Strecke $\overline{BC}$.

Dann gilt $\measuredangle BAW_A = \measuredangle W_AAC = \frac{\measuredangle BAC}{2} = \frac{\alpha}{2}$ und folglich (Winkelsumme im Dreieck):

$$\begin{array}{rrcl}
 & \measuredangle AW_AB & = & 180° - \measuredangle BAW_A - \measuredangle W_ABA & = & 180° - \frac{\alpha}{2} - \alpha & = & 180° - \frac{3}{2}\cdot\alpha \\
\text{und} & \measuredangle CW_AA & = & 180° - \measuredangle W_AAC - \measuredangle ACW_A & = & 180° - \frac{\alpha}{2} - (180° - 2\alpha) & = & \frac{3}{2}\cdot\alpha
\end{array}$$



Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn es zwei gleiche Winkel hat. Also folgt:

- $\triangle ABW_A$ ist genau dann gleichschenklig, wenn eine der folgenden Gleichungen erfüllt ist:

$$\begin{array}{lrcl@{\quad}c@{\quad}rcll}
 & \alpha & = & \frac{\alpha}{2} & \Leftrightarrow & \alpha & = & 0° & \text{(nicht möglich)} \\
\text{ODER} & \alpha & = & 180° - \frac{3}{2}\cdot\alpha & \Leftrightarrow & \alpha & = & 72° & \\
\text{ODER} & \frac{\alpha}{2} & = & 180° - \frac{3}{2}\cdot\alpha & \Leftrightarrow & \alpha & = & 90° & \text{(nicht möglich, da der Winkel } \alpha \text{ zweimal in } \triangle ABC \text{ auftritt)}
\end{array}$$

- $\triangle AW_AC$ ist genau dann gleichschenklig, wenn eine der folgenden Gleichungen erfüllt ist:

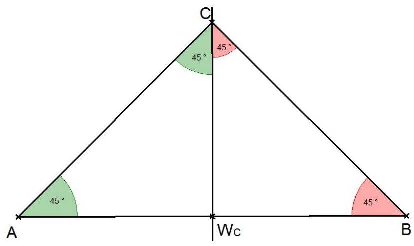
$$\begin{array}{lrcl@{\quad}c@{\quad}rcll}
 & \frac{3}{2}\cdot\alpha & = & \frac{\alpha}{2} & \Leftrightarrow & \alpha & = & 0° & \text{(nicht möglich)} \\
\text{ODER} & \frac{3}{2}\cdot\alpha & = & 180° - 2\alpha & \Leftrightarrow & \alpha & = & \frac{360}{7}° & \\
\text{ODER} & \frac{\alpha}{2} & = & 180° - 2\cdot\alpha & \Leftrightarrow & \alpha & = & 72° &
\end{array}$$

3. Fall: Die Betrachtung der Winkelhalbierende w_B im Punkt B liefert aufgrund der Symmetrie dieselben Ergebnisse wie im 2. Fall.

Insgesamt sind folgende Innenwinkelmaße für $\triangle ABC$ möglich:

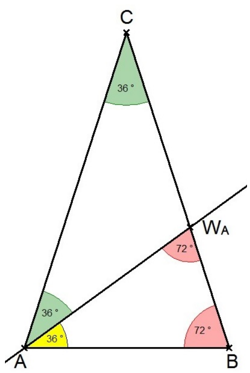
1. $45°,\ 45°,\ 90°$

   In diesem Fall teilt die Winkelhalbierende im 90°-Winkel das gegebene Dreieck in zwei gleichschenklige Dreiecke.



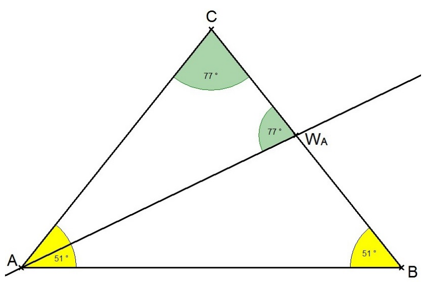
2. $72°,\ 72°,\ 36°$

   In diesem Fall teilt die Winkelhalbierende in einem der 72°-Winkel das gegebene Dreieck in zwei gleichschenklige Dreiecke.



3. $\frac{360}{7}°,\ \frac{360}{7}°,\ \frac{540}{7}°$

   In diesem Fall teilt die Winkelhalbierende in einem der $\frac{360}{7}°$-Winkel das gegebene Dreieck so, dass ein gleichschenkliges Dreieck entsteht.



TAG DER MATHEMATIK 2018

Aufgabe MG2:

Gegeben sei eine fünf-stellige natürliche Zahl:

$$\boxed{N = abcde} \quad \text{mit unbekannten Ziffern } a, b, c, d, e \in \{0, \dots, 9\} \text{ und } a \neq 0$$

Bestimme a, b, c, d, e so, dass: $\boxed{4 \cdot N = edcba}$

Dabei sollte auch klar werden, wieso es keine andere Möglichkeit für die Wahl von a, b, c, d, e gibt.

Lösung MG2:

$$\boxed{4 \cdot abcde = edcba}$$

Wäre $a \geq 3$, so wäre $4 \cdot N > 4 \cdot 30000 > 99999$. Dies kann nicht sein, da wir wissen, dass $4 \cdot N$ ebenfalls eine 5-stellige Zahl ist. Also ist $a \leq 2$. Da a außerdem die Endziffer von $4 \cdot N$ ist, ist a gerade. Der Fall $a = 0$ wurde in der Aufgabenstellung ausgeschlossen. Also bleibt nur: $\boxed{a = 2}$

$$\boxed{4 \cdot 2bcde = edcb2}$$

Nun wissen wir, dass $4 \cdot N \geq 4 \cdot 20000 = 80000$ gilt. Somit muss $e \geq 8$ sein. Wäre $e = 9$ so wäre die Endziffer von $4 \cdot N$ (wegen $4 \cdot 9 = 36$) die Zahl 6. Wir wissen aber schon, dass $a = 2$ die Endziffer von $4 \cdot N$ ist. Also: $\boxed{e = 8}$

$$\boxed{4 \cdot 2bcd8 = 8dcb2}$$

Wäre nun $b \geq 3$, so wäre $4 \cdot N > 4 \cdot 23000 > 89999$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass $e = 8$ die führende Ziffer von $4 \cdot N$ ist.
Außerdem muss b ungerade sein, denn $4 \cdot d8$ hat die beiden Endziffern $b2$ und somit ist (wegen $4 \cdot 8 = 32$) b die Endziffer von $4 \cdot d + 3$ (diese ist immer ungerade).
Zusammen folgt: $\boxed{b = 1}$

$$\boxed{4 \cdot 21cd8 = 8dc12}$$

Da $b = 1$ die Endziffer von $4 \cdot d + 3$ ist (siehe oben), sieht man an der Tabelle

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$4 \cdot d + 3$	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39
Endziffer von $4 \cdot d + 3$	3	7	1	5	9	3	7	1	5	9

dass nur $d = 2$ oder $d = 7$ in Frage kommt.
Wäre $d = 2$, so wäre $4 \cdot N < 82927$ und gleichzeitig $4 \cdot N > 4 \cdot 21028 = 84112$, dies kann nicht sein. Also bleibt nur: $\boxed{d = 7}$

$$\boxed{4 \cdot 21c78 = 87c12}$$

Nun wissen wir, dass $\underbrace{N = 21078 + 100c}_{(1)}$ und $\underbrace{4 \cdot N = 87012 + 100c}_{(2)}$ ist.

Setzt man (1) in (2) ein, so folgt:

$$4 \cdot (21078 + 100c) = 87012 + 100c \quad \Leftrightarrow \quad 84312 + 400c = 87012 + 100c \quad \Leftrightarrow \quad 300c = 2700 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{c = 9}$$

Also ist die gesuchte Zahl: $\boxed{N = 21978}$

Aufgabe MG3:

(a) Matti und Tobi befinden sich am selben Punkt auf einem Fußweg, der parallel zu einer Bahnlinie verläuft. Als die Spitze eines vorbeifahrenden Zuges genau auf gleicher Höhe mit ihnen ist, laufen beide mit derselben Geschwindigkeit in entgegengesetzte Richtungen los.

- Matti läuft entgegengesetzt zur Fahrtrichtung des Zuges. Nachdem er 21 Meter gelaufen ist, hat er das Ende des fahrenden Zuges erreicht.
- Tobi läuft in Fahrtrichtung des Zuges. Nachdem er 33 Meter gelaufen ist, wird er vom Ende des Zuges überholt.

Wie lang ist der Zug?

(b) Matti und Tobi kehren beide direkt um, nachdem sie die 21 bzw. 33 Meter bis zum Zugende gelaufen sind. Wie weit ist das Ende des Zuges von ihnen entfernt, wenn sie sich wieder begegnen?

Lösung MG3:

(a) Sei v die Geschwindigkeit von Matti und Tobi und sei v_Z die Geschwindigkeit des Zuges. Sei ℓ die gesuchte Länge des Zuges.

- Während Matti 21m läuft, legt der Zug die Strecke $\ell - 21\text{m}$ zurück. Also gilt:

$$\frac{v}{v_Z} = \frac{21\text{m}}{\ell - 21\text{m}}$$

- Während Tobi 33m läuft, legt der Zug die Strecke $\ell + 33\text{m}$ zurück. Also gilt:

$$\frac{v}{v_Z} = \frac{33\text{m}}{\ell + 33\text{m}}$$

Gleichsetzen liefert:

$$\begin{aligned}
\frac{21\text{m}}{\ell - 21\text{m}} = \frac{33\text{m}}{\ell + 33\text{m}} \quad &\Rightarrow \quad 21\text{m} \cdot (\ell + 33\text{m}) = 33\text{m} \cdot (\ell - 21\text{m}) \\
&\Rightarrow \quad 2 \cdot 21\text{m} \cdot 33\text{m} = (33\text{m} - 21\text{m}) \cdot \ell \\
&\Rightarrow \quad \ell = \frac{2 \cdot 21\text{m} \cdot 33\text{m}}{12\text{m}} = 115.5\text{m}
\end{aligned}$$

Der Zug ist also 115.5 Meter lang.

(b) Da Matti und Tobi gleich schnell laufen, läuft Matti 33m zurück und Tobi 21m zurück bis sie sich wieder begegnen. (Dann sind beide genau 21m+33m= 33m+21m gelaufen.) Sie begegnen sich also 33m-21m= 12m in Fahrtrichtung des Zuges vom Ausgangspunkt entfernt.

Der Zug hat in der gesamtem Zeitspanne von Loslaufen bis Wiederbegegnen die folgende Strecke zurückgelegt (siehe (a)):

$$\underbrace{\ell - 21\text{m}}_{\text{während 21m Laufen}} + \underbrace{\ell + 33\text{m}}_{\text{während 33m Laufen}} = 2\ell + 12\text{m}$$

Der Abstand der beiden zur Spitze des Zuges ist beim Wiederbegegnen demnach:

$$2\ell + 12\text{m} - 12m = 2\ell$$

Folglich beträgt der Abstand der beiden zum Ende des Zuges beim Wiederbegegnen:

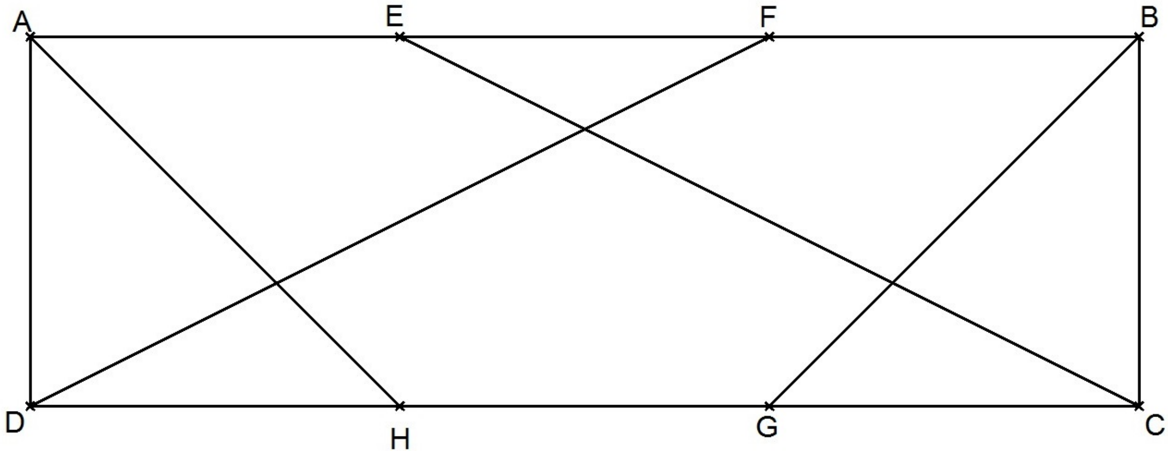
$$2\ell - \ell = \ell = 115.5\text{m}$$

Aufgabe MG4:

Gegeben sei ein Rechteck $\square ABCD$ mit Seitenlängen $|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = 3$ und $|\overline{BC}| = |\overline{DA}| = 1$.

Die Punkte E und F teilen die Strecke $\overline{AB}$ in drei gleich große Teilstrecken.
Die Punkte G und H teilen die Strecke $\overline{CD}$ in drei gleich große Teilstrecken.

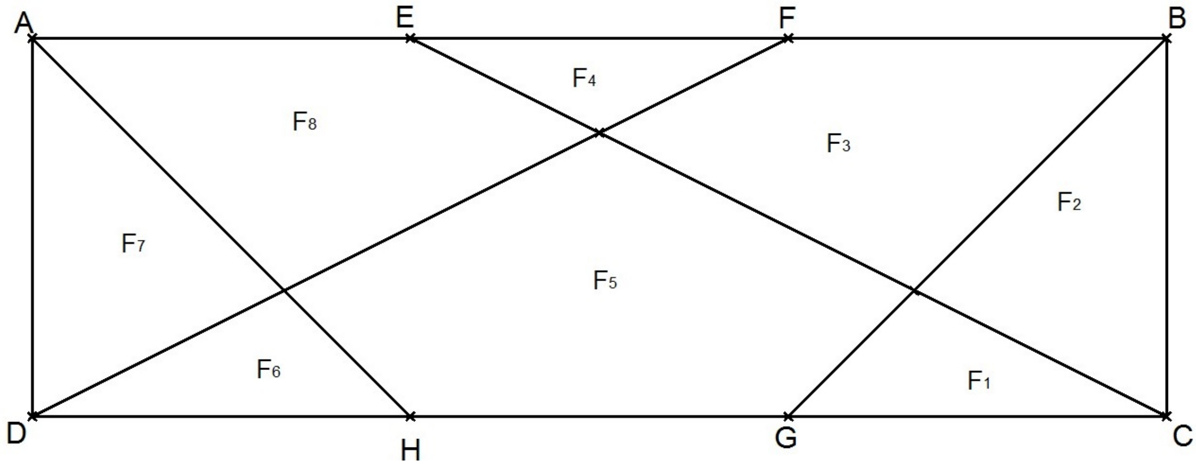
Durch das Einzeichnen der Strecken $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CE}$, $\overline{DF}$ wird die Rechtecksfläche in 8 Teilflächen zerlegt (siehe Zeichnung).



Bestimme den Flächeninhalt von jeder dieser Teilflächen. Die Korrektheit der Antwort ist zu begründen.

Lösung MG4:

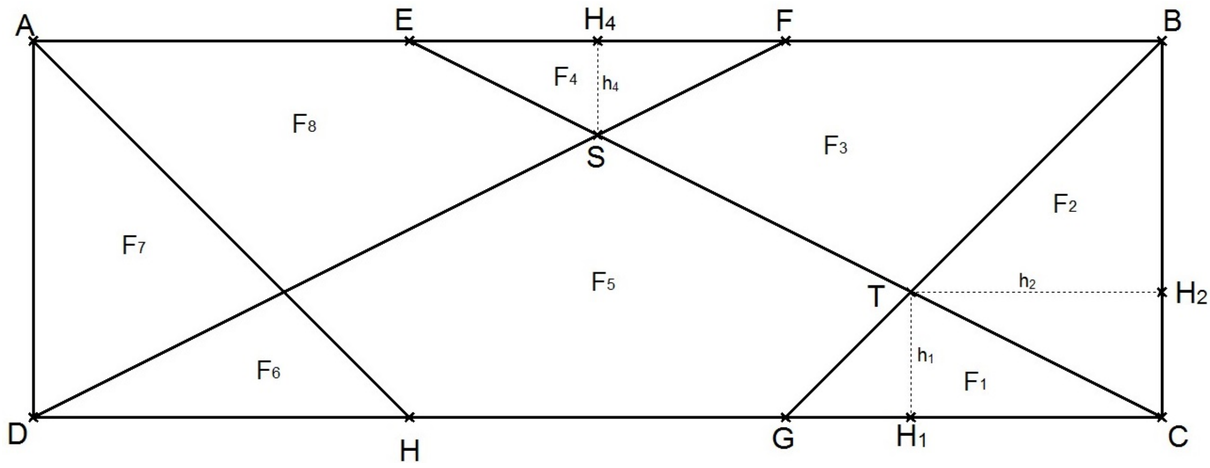
Wir bezeichnen die 8 Flächen mit $F_1, \dots, F_8$ wie folgt:



Wir bezeichnen den Schnittpunkt von $\overline{CE}$ und $\overline{DF}$ mit S und den Schnittpunkt von $\overline{CE}$ und $\overline{BG}$ mit T.

Weiterhin:

- Es ist $F_1 = \triangle GCT$. Sei h_1 die Höhe von T in diesem Dreieck und H_1 der Fußpunkt von h_1.
- Es ist $F_2 = \triangle CBT$. Sei h_2 die Höhe von T in diesem Dreieck und H_2 der Fußpunkt von h_2.
- Es ist $F_4 = \triangle ESF$. Sei h_4 die Höhe von S in diesem Dreieck und H_4 der Fußpunkt von h_4.



(i) Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{h_4}{|\overline{AD}|} = \frac{|\overline{FH_4}|}{|\overline{FA}|} \quad \Rightarrow \quad \frac{h_4}{1} = \frac{(1/2)}{2} \quad \Rightarrow \quad h_4 = \frac{1}{4}$$

Damit ist:

$$F_4 = F(\triangle ESF) = \frac{1}{2} \cdot h_4 \cdot |\overline{EF}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{8}$$

(ii)
- Da $\square H_1CH_2T$ drei rechte Winkel hat (bei H_1, H_2 und C), ist es ein Rechteck. Damit gilt auch $|\overline{CH_2}| = |\overline{TH_1}| = h_1$. Nach dem Strahlensatz folgt:

$$\frac{h_2}{|\overline{EB}|} = \frac{|\overline{CH_2}|}{|\overline{CB}|} \quad \Rightarrow \quad \frac{h_2}{2} = \frac{h_1}{1} \quad \Rightarrow \quad h_2 = 2h_1$$

- Außerdem wissen wir, dass $F_1 + F_2 = F(\triangle GCB) = \frac{1}{2} \cdot |\overline{GC}| \cdot |\overline{CB}| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$ gilt.
  Andererseits ist aber:

$$F_1+F_2 = F(\triangle GCT)+F(\triangle CBT) = \frac{1}{2}\cdot h_1\cdot|\overline{GC}|+\frac{1}{2}\cdot h_2\cdot|\overline{CB}| = \frac{1}{2}\cdot h_1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot h_2\cdot 1 = \frac{1}{2}\cdot(h_1+h_2)$$

  Damit folgt: $h_1 + h_2 = 1$

Setzt man $h_2 = 2h_1$ in $h_1 + h_2 = 1$ ein, so folgt:

$$h_1 + 2h_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{1}{3} \quad \overset{(h_2=2h_1)}{\Rightarrow} \quad h_2 = \frac{2}{3}$$

Nun können wir schließen:

$$\begin{array}{lllllllll} & F_1 & = & F(\triangle GCT) & = & \frac{1}{2}\cdot h_1 \cdot |\overline{GC}| & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 & = & \frac{1}{6} \\ \text{und} & F_2 & = & F(\triangle CBT) & = & \frac{1}{2}\cdot h_2 \cdot |\overline{CB}| & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 & = & \frac{1}{3} \end{array}$$

(iii) Es gilt:

$$F_2 + F_3 + F_4 = F(\triangle CBE) = \frac{1}{2} \cdot |\overline{CB}| \cdot |\overline{BE}| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

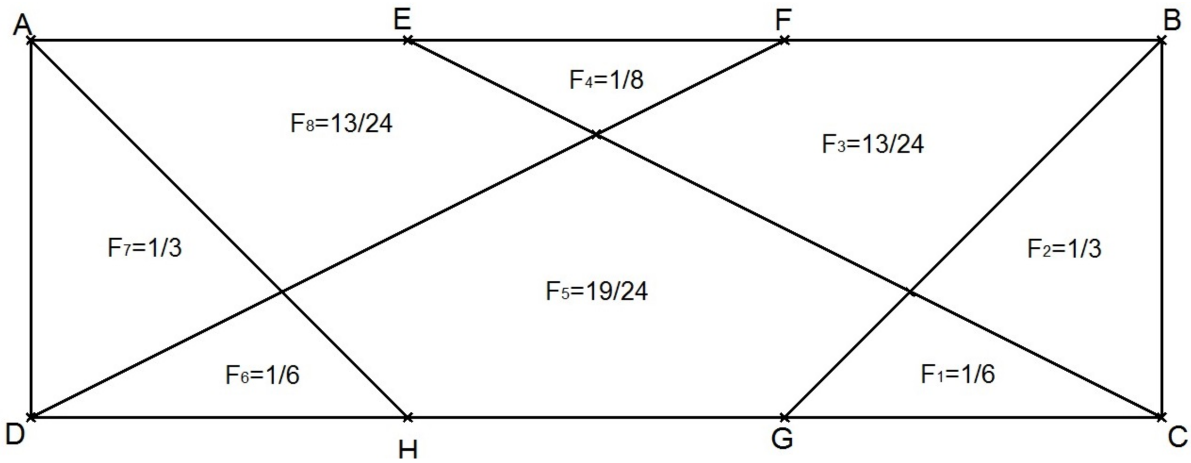
Umstellen nach F_3 liefert: $F_3 = 1 - F_2 - F_4 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{13}{24}$

(iv) Analog zur Berechnung von F_1, F_2 und F_3 folgt:

$$F_6 = F_1 = \frac{1}{3} \quad , \quad F_7 = F_2 = \frac{2}{3} \quad , \quad F_8 = F_3 = \frac{5}{24}$$

(v) Schließlich gilt (mit $F(\square ABCD) = |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}| = 3 \cdot 1 = 3$):

$$F_5 = F(\square ABCD) - F_1 - F_2 - F_3 - F_4 - F_5 - F_6 - F_7 = 3 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{13}{24} - \frac{1}{8} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{13}{24} = \frac{19}{24}$$



TAG DER MATHEMATIK 2018

Aufgabe MS1:

In einem Buch stehen im Durchschnitt 8 Buchstaben auf einem Quadratzentimeter Papierfläche. Das Buch hat (ohne den Einband) ein Volumen von 0.02m^3 bei einer Papierdicke von 0.1mm.

Wieviele Buchstaben stehen in dem Buch?

Lösung MS1:

Legt man alle Seiten des Buchs nebeneinander, so erhält man eine Fläche von

$$\frac{\text{Volumen}}{\text{Dicke}} = \frac{0.02\text{m}^3}{0.1\text{mm}} = \frac{20000\text{cm}^3}{0.01\text{cm}} = 2000000\text{cm}^2$$

Da diese Fläche doppelt beschrieben ist und im Durchschnitt 8 Buchstaben auf einem Quadratzentimeter Papierfläche stehen, beträgt die Anzahl der Buchstaben in dem Buch:

$$2 \cdot 2000000\text{cm}^2 \cdot \frac{8}{\text{cm}^2} = 32000000 = 32 \text{ Millionen}$$

Aufgabe MS2:

Lisa möchte monatlich etwas von ihrem Taschengeld sparen, um sich ein Mountainbike zu kaufen. Sie bekommt jeden Monat denselben Betrag und überlegt:

- Wenn ich jeden Monat 20 Euro ausgebe und den Rest spare, habe ich in 18 Monaten genug Geld für das Mountainbike gespart.
- Wenn ich jeden Monat 10 Euro ausgebe und den Rest spare, habe ich in 12 Monaten genug Geld für das Mountainbike gespart.

Nach wieviel Monaten könnte sich Lisa das Mountainbike kaufen, wenn sie ihr komplettes Taschengeld dafür spart?

Lösung MS2:

Sei x der Betrag, den Lisa monatlich erhält und M der Preis des Mountainbikes. Dann gilt:

$$18 \cdot (x - 20) = M \qquad \text{und} \qquad 12 \cdot (x - 10) = M$$

Gleichsetzen liefert:

$$18 \cdot (x - 20) = 12 \cdot (x - 10) \;\Leftrightarrow\; 18x - 360 = 12x - 120 \;\Leftrightarrow\; 6x = 240 \;\Leftrightarrow\; x = 40$$

Damit folgt: $M = 12 \cdot (40 - 10) = 360$

Lisa erhält also monatlich 40 Euro Taschengeld, das Mountainbike kostet 360 Euro. Würde sie ihr Taschengeld komplett sparen, könnte sie sich das Mountainbike nach $\frac{360}{40} = 9$ Monaten kaufen.

TAG DER MATHEMATIK 2018

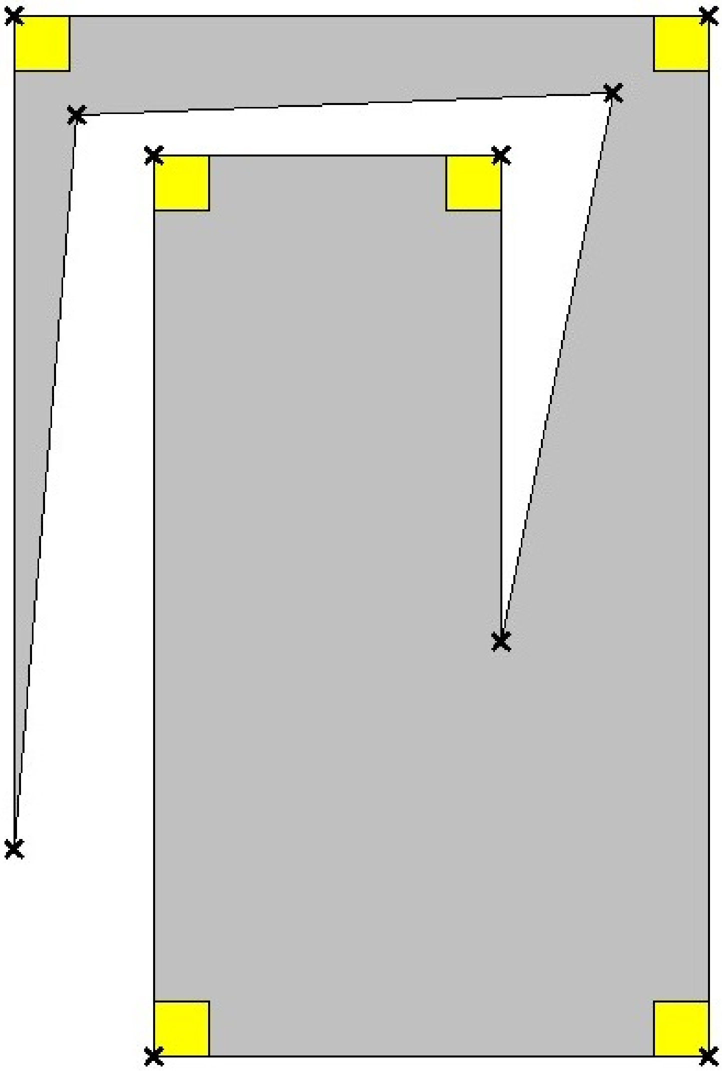
Aufgabe MS3:

Wieviele Innenwinkel, die genau 90° betragen, kann ein 10-Eck maximal haben.

Fertigen Sie eine Skizze mit einem solchen 10-Eck an.

Lösung MS3:

Ein 10-Eck kann maximal 7 Innenwinkel haben, die 90° betragen. Hier ist solches 10-Eck:



Da die Innenwinkelsumme in einem 10-Eck stets $(10-2)\cdot 180° = 1440°$ beträgt, müsste bei einem 10-Eck mit 8 Innenwinkeln, die 90° betragen, die Summe der beiden verbleibenden Innenwinkel

$$1440° - 8 \cdot 90° = 720°$$

ergeben. Dies kann nicht sein, da diese beiden Winkel $< 360°$ sind.

TAG DER MATHEMATIK 2018

Aufgabe MS4:

In einer Firma beträgt das Durchschnittsalter der Mitarbeiter genau 38 Jahre.

Nun verlassen zwei 65-jährige Mitarbeiter die Firma (und gehen in Rente), zeitgleich kommen zwei 25-jährige Mitarbeiter (frisch von der Uni) hinzu.

Dadurch sinkt das Durchschnittsalter der Mitarbeiter der Firma auf 37 Jahre.

Wie viele Mitarbeiter hat die Firma?

Lösung MS4:

Sei N die Anzahl der Mitarbeiter der Firma und S die Summe der Alterszahlen der Mitarbeiter vor dem Austausch der Mitarbeiter.

Nach dem Austausch beträgt die Summe der Alterszahlen der Mitarbeiter dann nur noch:

$$S - 2 \cdot 65 + 2 \cdot 25 = S - 80$$

Aus den angegebenen Durchschnitten folgt nun:

$$\begin{aligned} 38 &= \tfrac{S}{N} & \Leftrightarrow \quad 38N &= S \\ 37 &= \tfrac{S-80}{N} & \Leftrightarrow \quad 37N &= S - 80 \end{aligned}$$

Subtrahiert man beide Gleichungen voneinander, so folgt: $\quad N = S - (S - 80) = 80$

Die Firma hat also 80 Mitarbeiter.

TAG DER MATHEMATIK 2018

Aufgabe MS5:

Bei einem Radrennen hat Arne einen Vorsprung vor Bert.

Ein Streckenposten am Punkt X notiert, dass Bert genau 1 Minute später als Arne vorbeikommt. Beide fahren ab dem Punkt X zunächst mit der konstanten Geschwindigkeit von 30km/h weiter.

Ab einem gewissen Zeitpunkt T setzt plötzlich starker Gegenwind ein und beide fahren ab dem Zeitpunkt T bis zum Ziel nur noch mit der Geschwindigkeit von 25km/h.

Mit welchem Zeit Vorsprung kommt Arne vor Bert ins Ziel?

Lösung MS5:

In einer Minute legen beide bei einer Geschwindigkeit von 30km/h die Strecke

$$30\text{km/h} \cdot \frac{1}{60}\text{h} = 0.5\text{km}$$

zurück. Arne hat also einen Vorsprung von 0.5km auf Bert.

Dieser Abstand von 0.5km ändert sich nicht bis Arne im Ziel ist, da beide zu jedem Zeitpunkt mit der gleichen Geschwindigkeit unterwegs sind.

Nachdem Arne im Ziel ist, braucht Bert noch

$$\frac{0.5\text{km}}{25\text{km/h}} = 0.02\text{h} = 0.02 \cdot 60\text{min} = 1.2\text{min} = 1\text{min} + 12\text{s}$$

bis zum Ziel.

Arne hat im Ziel also einen Vorsprung von 1 Minute und 12 Sekunden.

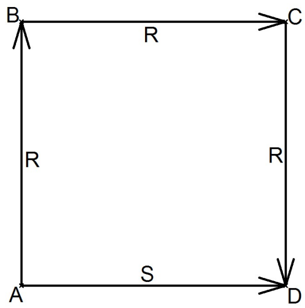
TAG DER MATHEMATIK 2018

Aufgabe MS6:

Gegeben sei ein Quadrat $\square ABCD$ mit Seitenlänge $1m$.

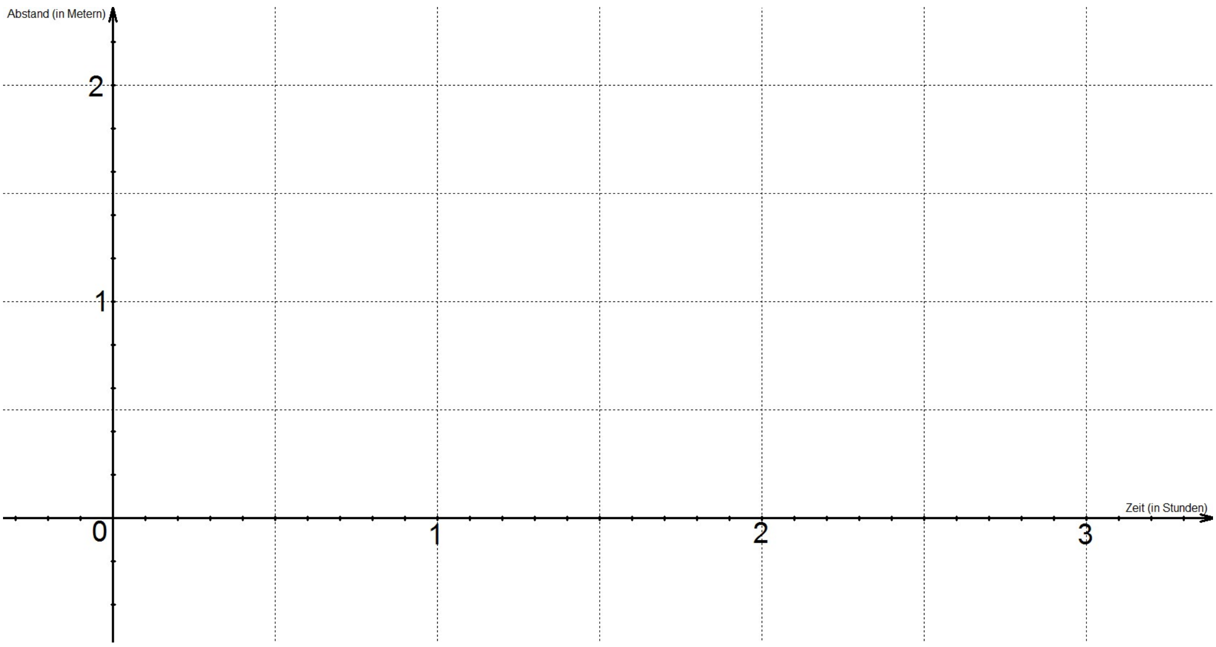
Im Punkt A befinden sich die Schnecke Siggi und die Rennschnecke Rudi.

Beide kriechen zum selben Zeitpunkt los, wobei sich Siggi auf gerader Strecke von A nach D und Rudi von A über B und C nach D bewegt.



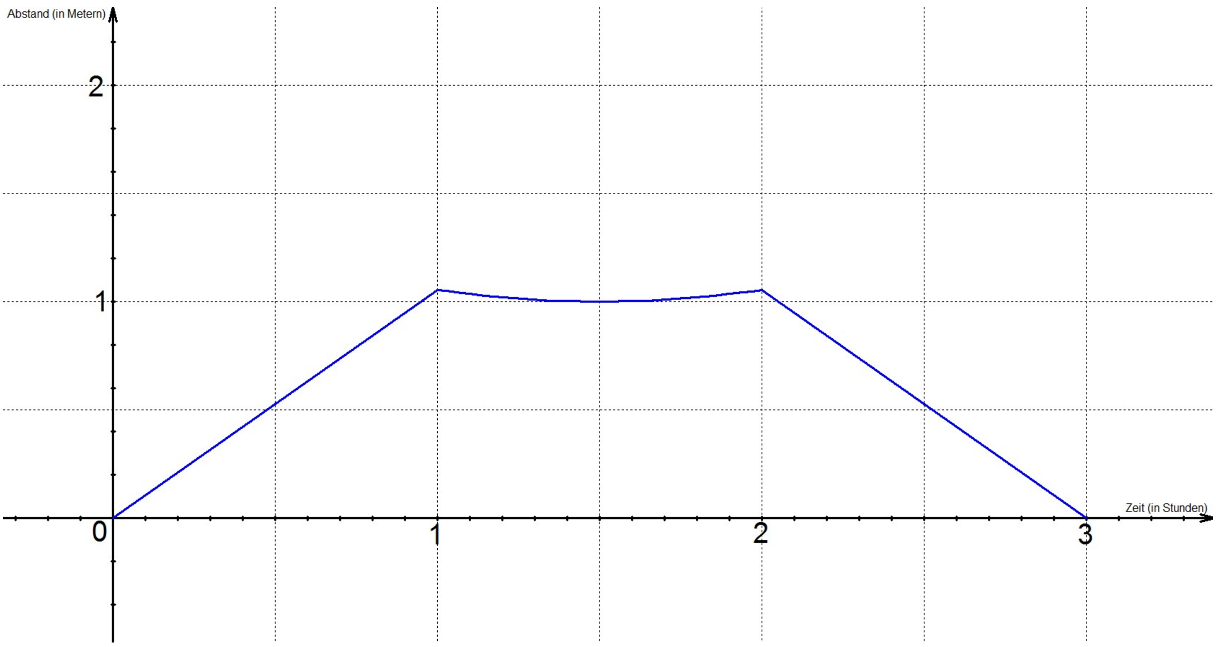
Beide bewegen sich jeweils mit gleichbleibender Geschwindigkeit und treffen nach 3 Stunden genau gleichzeitig im Punkt D ein.

Skizzieren Sie in das folgende Koordinatensystem den Abstand der beiden Schnecken zueinander in Abhängigkeit von der Zeit.



Dabei sollte die Größenordung der Funktionswerte stimmig sein, außerdem sollten Eigenschaften wie Monotonieverhalten, Krümmung und Symmetrie erkennbar sein.

Lösung MS6:



Aufgabe MS7:

Wir betrachten die Zahlen $n_1, \ldots, n_9$ die wie folgt definiert sind:

$$\begin{array}{lcll}
n_1 & = & 11\ldots11 & \text{(Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Einsen besteht)} \\
n_2 & = & 22\ldots22 & \text{(Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Zweien besteht)} \\
n_3 & = & 33\ldots33 & \text{(Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Dreien besteht)} \\
n_4 & = & 44\ldots44 & \text{(Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Vieren besteht)} \\
n_5 & = & 55\ldots55 & \text{(Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Fünfen besteht)} \\
n_6 & = & 66\ldots66 & \text{(Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Sechsen besteht)} \\
n_7 & = & 77\ldots77 & \text{(Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Siebenen besteht)} \\
n_8 & = & 88\ldots88 & \text{(Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Achten besteht)} \\
n_9 & = & 99\ldots99 & \text{(Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Neunen besteht)}
\end{array}$$

Sei nun $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9$ die Summe dieser neun Zahlen.

Bestimmen Sie die Quersumme von n.

Lösung MS7:

Es gilt: $n_2 = 2 \cdot n_1 \quad , \quad n_3 = 3 \cdot n_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad n_9 = 9 \cdot n_1$

Daraus folgt:

$$n = n_1 + 2 \cdot n_1 + 3 \cdot n_1 + \ldots + 9 \cdot n_1 = (1 + 2 + 3 + \ldots + 9) \cdot n_1 = 45 \cdot n_1$$

Wir berechnen nun $n = 45 \cdot n_1$ mittels schriflicher Multiplikation:

$$\begin{array}{cccccccc}
45 & \cdot & & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\
\hline
 & & & 5 & 5 & \ldots & 5 & 5 \\
 & & 4 & 4 & 4 & \ldots & 4 & 0 \\
\hline
 & & 4 & 9 & 9 & \ldots & 9 & 5
\end{array}$$

Damit gilt: $n = 4 \underbrace{99\ldots99}_{\text{2017 Neunen}} 5$

Folglich ist die Quersumme von n gegeben durch:

$$Q(n) = 4 + 2017 \cdot 9 + 5 = 2018 \cdot 9 = 18162$$

Aufgabe MS8:

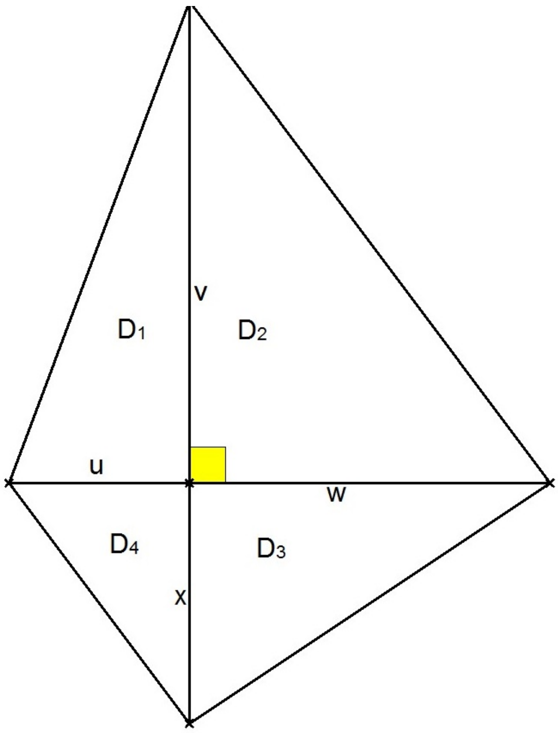
Ein Viereck wird durch die sich senkrecht schneidenden Diagonalen in vier Dreiecke unterteilt, von denen drei die folgenden Flächeninhalte haben:

$$6\text{cm}^2 \quad , \quad 10\text{cm}^2 \quad , \quad 12\text{cm}^2$$

Welchen Flächeninhalt kann das vierte Dreieck haben? Geben Sie alle Möglichkeiten an.

Lösung MS8:

Wir bezeichnen die Längen der Strecken vom Diagonalenschnittpunkt zu jeweils einem der Eckpunkte des Dreiecks mit u, v, w, x und die vier Teildreiecke mit D_1, D_2, D_3, D_4 (siehe Grafik):



Es gilt:

$$\left\{\begin{array}{lcl} D_1 & = & \frac{1}{2}\cdot u\cdot v \\ D_2 & = & \frac{1}{2}\cdot v\cdot w \\ D_3 & = & \frac{1}{2}\cdot w\cdot x \\ D_4 & = & \frac{1}{2}\cdot x\cdot u \end{array}\right\} \Rightarrow \quad D_1\cdot D_3 = \frac{1}{4}\cdot u\cdot v\cdot w\cdot x = D_2\cdot D_4 \quad \Rightarrow \quad D_4 = \frac{D_1\cdot D_3}{D_2}$$

Also:

- Falls $D_2 = 6\text{cm}^2$ und $\{D_1, D_3\} = \{10\text{cm}^2, 12\text{cm}^2\}$ ergibt sich: $D_4 = \frac{10\text{cm}^2\cdot 12\text{cm}^2}{6\text{cm}^2} = 20\text{cm}^2$
- Falls $D_2 = 10\text{cm}^2$ und $\{D_1, D_3\} = \{6\text{cm}^2, 12\text{cm}^2\}$ ergibt sich: $D_4 = \frac{6\text{cm}^2\cdot 12\text{cm}^2}{10\text{cm}^2} = 7.2\text{cm}^2$
- Falls $D_2 = 12\text{cm}^2$ und $\{D_1, D_3\} = \{6\text{cm}^2, 10\text{cm}^2\}$ ergibt sich: $D_4 = \frac{6\text{cm}^2\cdot 10\text{cm}^2}{12\text{cm}^2} = 5\text{cm}^2$

Das vierte Dreieck kann also den Flächeninhalt 20cm^2 oder 7.2cm^2 oder 5cm^2 haben.